BIBLIOTECA SCOLASTICA

TRATTATO

DI

ARITMETICA TEORICO-PRATICA

corredato di una scelta di esercizi di calcolo e d'un gran numero di problemi graduati ed istruttivi colla respettiva risposta,

CONTENENTE

la teoria delle progressioni e dei logaritmi

TERZA EDIZIONE

compilata sulle tracce dei programmi governativi per le scuole elementari superiori, tecniche, ginnasiali e magistrali.

DA

CESARE PAGNINI

Prof. di Matematica nelle scuole ginnasiali e tecniche di Pistoia

---

Opera approvata come libro di testo dal consiglio provinciale scolastico nell' adunanza del 6 ottobre 1866.

FIRENZE
FELICE PAGGI EDITORE LIBRAIO
1868

Tipografia di Giulio Cesare Marchini

prezzo lire 2·50.

TRATTATO

DI

ARITMETICA TEORICO-PRATICA

corredato di una scelta di esercizi di calcolo e d' un gran numero di problemi graduati ed istruttivi colla respettiva risposta,

contenente

la teoria delle progressioni e dei logaritmi

TERZA EDIZIONE

compilata sulle tracce dei programmi governativi per le scuole elementari superiori, tecniche, ginnasiali e magistrali.

DA

CESARE PAGNINI

Prof. di Matematica nelle scuole ginnasiali e tecniche di Pistoia

---

opera approvata come libro di testo dal consiglio provinciale scolastico nell' adunanza del 6 ottobre 1866.

FIRENZE

FELICE PAGGI EDITORE LIBRAIO

1868

A

FRANCESCO PAGNINI

MIO OTTIMO PADRE

Pongo il suo nome in fronte a questo mio lavoro per sodisfare il vivo desiderio di darle una manifesta prova della mia filiale gratitudine. Ardentemente ha proseguito finora in me questo desiderio con perseveranza eguale a quella delle infinite cure colle quali Ella accompagnò la mia educazione morale e civile, affinchè un giorno potessi anch' io essere utile a me stesso e alla società. Eccomi al compimento del mio voto più grato, del più sacro dovere. Dopo non lieve fatica, son lieto di pubblicare oggi il presente Trattato che, qualunque esso sia,

io col cuore pieno di riconoscenza e di affetto offro e dedico a Lei, quale resultato degli studi di cui Ella mi espose così bene e con tanta pazienza i principii. Lo abbia dunque bene accetto, caro Padre; e se ne avrà consolazione il suo cuore, si stimerà appieno felice il suo

30 Maggio 1864.

Affettuoso figlio
Cesare

AL LETTORE

Questa terza edizione contiene come la precedente tutto ciò che richiedono i Programmi ufficiali per le Scuole tecniche, ginnasiali e magistrali (*). — L'ordine delle materie non è stato in nulla alterato, ma molte dimostrazioni e regole, per amor di chiarezza e concisione, sono state in tutto od in parte notevolmente migliorate. — Gli Esercizi ed i Problemi, d'assai aumentati, vennero con cura riordinati e corretti, e a molti di troppo elementari furono sostituiti altri più atti ad esercitare la mente degli studiosi nella soluzione di essi.

La somma cura posta nel pubblicare nuovamente questo Trattato ed i molti e notevoli miglioramenti introdottivi, m'inducono a sperare che esso sarà bene accetto agl' Insegnanti e in generale a tutti gli studiosi di questa scienza.

C. Pagnini

(*) L'introduzione di questo Trattato nelle Scuole pubbliche fu autorizzato dal Consiglio provinciale scolastico nell'adunanza del 6 Ottobre 1866.

I Programmi vedansi alla fine del libro.

Nozioni Preliminari.

1. In Matematiche si chiama QUANTITÀ O GRANDEZZA tutto ciò che può essere aumentato o diminuito, come la *lunghezza* di una riga, la *superficie* d'una stanza, il *peso* di una pietra, una *somma* di denaro ec.

2. Per formarci un'idea esatta di una quantità, bisogna *misurarla*, vale a dire paragonarla ad un'altra quantità della stessa natura, che chiamasi *unità*.

L'UNITÀ è dunque *una quantità che serve di misura o di confronto a tutte le quantità della stessa specie.* — Così, quando si dice che un muro ha *dieci metri* di lunghezza, il metro, che ha servito di misura, è l'unità.

Quando una grandezza o quantità si considera come composta di parti uguali, dicesi grandezza o quantità *discreta.* — Così le espressioni: *un gregge di ottanta pecore, un' armata di duemila uomini* indicano che le quantità *gregge* e *armata* si compongono respettivamente di *ottanta pecore* e di *duemila uomini*, cioè di ottanta e di duemila parti tutte uguali alle unità *pecora* e *uomo.* — Queste dunque sono quantità discrete.

Quando all'opposto una grandezza o quantità si considera come un tutto indivisibile, si chiama grandezza o quantità *continua.* — Così *l'estensione territoriale d'un paese, la lunghezza d'una strada* ec. sono quantità continue, perchè presentano unione e continuità di parti.

3. Si chiama NUMERO la parola che esprime quante unità o parti di unità sono in una quantità. — Così, dicendo: *dieci metri, cento litri, trenta lire*, le parole *dieci, cento, trenta* sono numeri.

L'unità è presentata dalla natura nelle quantità discrete; infatti, per determinare, per esempio, la quantità degli alberi di una foresta, delle case di una città e via dicendo, troviamo l'unità indipendentemente dall'arbitrio nostro; mentre nelle quantità continue dipende o da noi o dall'uso.

I numeri sono dunque quantità discrete; l'unità invece si considera come quantità continua, il che dà luogo all'arbitrio nella diversità delle sue parti.

4. Vi sono tre specie di numeri, cioè: *numeri interi, frazioni* e *numeri frazionari* o *misti*. — Numero *intero* è quello che non contiene che unità intere, come *dieci, venti, ottanta cinque*. — *Frazione* è quel numero che non contiene che una o più parti uguali di unità, come *un terzo, tre quinti, due noni*. — Numero *frazionario*, o *misto*, dicesi quello che contiene una o più unità intere, più una o diverse parti d'unità, come *dieci e mezzo, venti e due terzi* ecc.

5. Un numero è detto *concreto*, quando è seguito dal nome della sua unità, come *dodici metri, cento litri*. — Un numero chiamasi *astratto*, quando si dice semplicemente *dodici, cento, quattro* ec., senza indicare la specie d'unità che compone il numero.

I numeri concreti si distinguono in *omogenei* ed *eterogenei*. — *Omogenei* sono quelli che rappresentano unità della stessa specie; *eterogenei* quelli che indicano unità di specie diversa. — Così: *dodici lire* e *diciotto lire* sono due numeri concreti omogenei; *dodici cavalli* e *diciotto case* sono numeri concreti eterogenei.

6. Si chiama *Matematica* la scienza che si occupa di tutto ciò che è relativo alle quantità misurabili. — Le Matematiche si dividono in Matematiche *pure* e Matematiche *applicate*. — Le Matematiche pure considerano le quantità in generale, o in una maniera astratta: l'*Aritmetica*, l'*Algebra*, la *Geometria*, appartengono alle Matematiche pure. — Le Matematiche applicate considerano le quantità in particolare, o in una maniera concreta tali sono la *Meccanica, l'Astronomia* ec.

7. L'*Aritmetica* è la parte delle Matematiche, la quale ha per oggetto la formazione dei numeri, la loro composizione e decomposizione, e lo studio delle loro proprietà. In una parola, *l'Aritmetica è la scienza dei numeri.*

NUMERAZIONE

Numerazione parlata.

8. La *Numerazione* insegna a formare i numeri, a enunciarli ed a scriverli. — Di qui nasce che la numerazione è di due specie: *numerazione parlata*, o *orale*, e *numerazione scritta*, o *grafica*.

9. La numerazione parlata insegna ad esprimere i numeri per mezzo di parole; la numerazione scritta dà il modo di rappresentare i numeri con alcuni caratteri chiamati *cifre*.

10. Per formare i numeri basta aggiungere l'unità a sè stessa, poi un'altra unità al numero così ottenuto e via di seguito fino all'infinito, perchè la serie dei numeri è illimitata.

11. L'unità presa sola, si chiama UNO; l'unità aggiunta all'unità, forma il numero DUE; aggiungendo un'altra unità al due, si ottiene il TRE; e continuando così, si hanno i numeri QUATTRO, CINQUE, SEI, SETTE, OTTO e NOVE, che formano l'UNITÀ DI PRIMO ORDINE. — Aggiungendo un'unità al nove, si ottiene il numero DIECI, che è la *base* del nostro sistema di numerazione. — La riunione di dieci unità, prende il nome di *diecina*, o UNITÀ DI SECONDO ORDINE.

12. Si conta per diecine, come si è contato per unità (Vedi n° 11.) Così dicesi:

Una diecina, o DIECI.
Due diecine, o VENTI.
Tre diecine, o TRENTA.
Quattro diecine, o QUARANTA.
Cinque diecine, o CINQUANTA;

e quindi, SESSANTA, SETTANTA, OTTANTA e NOVANTA.

13. Dieci diecine formano un *centinaio*, e compongono le UNITÀ DEL TERZO ORDINE.

14. I numeri compresi fra dieci e cento si enunciano indicando il numero di diecine che contengono, e aggiungendovi il nome del numero minore di dieci che li completa. Così diremo: *trenta cinque, quaranta sette, novanta nove.* — Vi ha eccezione pei numeri compresi fra dieci e venti, per i quali l'uso ha consacrato

il nome di *undici, dodici, tredici, quattordici* ec., invece di *dieci uno, dieci due, dieci tre,* ec.

15. Si conta per centinaia, come si è contato per unità. — Così dicesi:

Un centinaio, o CENTO.

Due centinaia, o DUECENTO.

Tre centinaia, o TRECENTO;

e quindi, QUATTROCENTO, CINQUECENTO, SEICENTO, SETTECENTO, OTTOCENTO, NOVECENTO.

16. Dieci centinaia formano un *migliaio,* e compongono le UNITÀ DEL QUARTO ORDINE.

17. I numeri compresi fra cento e mille, si esprimono enunciando il numero di centinaia che contengono, e aggiungendovi il nome del numero minore di cento che li completa. — Così dicesi: *cento ventitre, cinquecento ottantadue, novecento novantanove.*

18. Dieci migliaia formano una *diecina di migliaia,* e compongono le UNITÀ DEL QUINTO ORDINE. — Cento migliaia formano un *centinaio di migliaia,* e compongono le UNITÀ DEL SESTO ORDINE. — Mille migliaia formano un *milione,* e compongono le UNITÀ DEL SETTIMO ORDINE.

19. I numeri compresi fra mille e un milione, si esprimono enunciando quante migliaia contegono, e unendovi il nome del numero inferiore a mille che li completa. Così dicesi: *mille ottocento sessantatre; novantanovemila novecento novantanove.*

20. Le diecine di milioni formano le UNITÀ DELL' OTTAVO ORDINE. — Le centinaia di milioni compongono LE UNITÀ DEL NONO ORDINE. — Mille milioni formano un *bilione,* o *miliardo,* e compongono le UNITÀ DEL DECIMO ORDINE.

21. Per esprimere i numeri compresi fra un milione e mille milioni, o un bilione, s' indica quanti milioni contengono questi numeri, e vi si aggiunge il nome del numero minore di un milione che li completa. — Così diremo: *un milione trecento quarantadue mila settecento ventitre.* — E si continua così indefinitamente, avvertendo che mille bilioni fanno un *trilione,* mille trilioni un *quatrilione* ec. ec.

22. Dal fin qui esposto resulta:

1.° Che le unità, le diecine e le centinaia formano la prima classe dei numeri, chiamata *classe delle unità semplici.* — Le unità, le diecine e le centinaia di migliaia, compongono la seconda classe d' unità principali o *classe delle migliaia.* — Le unità, le diecine

e le centinaia di milioni, compongono la terza classe, chiamata *classe dei milioni*, ec. ec. — Ogni classe si compone adunque di unità, diecine e centinaia.

2.° Che sono necessarie *dieci unità* per formare una diecina, *dieci diecine* per formare un centinaio, *dieci centinaia* per formare un migliaio, *dieci migliaia* per formare una diecina di migliaia, e così di seguito. — Donde si vede che *dieci unità di un ordine o classe qualunque, valgono un' unità della classe immediatamente superiore.*

Numerazione scritta.

23. Abbiamo detto (Vedi n° 9) che la numerazione scritta ha per oggetto di rappresentare tutti i numeri col soccorso di un piccol numero di caratteri, chiamati *cifre*. — Ora queste cifre sono:

1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9,

che chiamansi *cifre significative*, più il carattere 0 (zero), e queste bastano a scrivere un numero qualunque.

A tale oggetto è stato convenuto di attribuire a ciascuna cifra, oltre il suo valore *assoluto*, un valore *relativo* dipendente dal posto che essa occupa; vale a dire che una cifra isolata rappresenta *unità*; una cifra situata alla sinistra di un' altra, rappresenta *diecine*; una cifra collocata alla sinistra delle diecine, rappresenta *centinaia*; una cifra posta alla sinistra delle centinaia, rappresenta *migliaia* ec. — Esempio: Nel numero 78324 la cifra 4 rappresenta *unità*: la cifra 2 rappresenta *diecine*: la cifra 3, *centinaia*: la cifre 8, *migliaia*: la cifra 7, *diecine di migliaia.*

24. Da ciò si deduce il principio importante, che *una cifra acquista un valore dieci volte più grande, a misura che si avanza di un posto verso la sinistra,* e viceversa.

Abbiasi, per esempio, la cifra 4. — Scrivendo uno zero alla sua destra, si ha il numero 40, che vale quattro diecine, ossia ha un valore dieci volte più grande di 4, giacchè così si è avanzata questa cifra di un posto verso la sinistra. — Scrivendo due zeri alla destra del 4, si ottiene il numero 400, che, per la nostra convenzione, ha un valore cento volte più grande di 4.

25. Da questi esempi si vede che lo *zero* è una cifra che per sè stessa non ha valore, ma serve a sostituire i diversi

ordini di unità che mancano, ed a fare occupare alle cifre significative il posto che loro appartiene.

Regola per leggere un numero scritto.

26. Dalla convenzione sopra stabilita (Vedi n° 23) si ricava la regola seguente:

Per leggere un numero, se non ha più di quattro cifre, si enunciano successivamente le differenti cifre, cominciando da sinistra e indicando il nome dell'unità che rappresentano. — Esempio: Il numero 3824, si legge: *tre migliaia, otto centinaia, due diecine, quattro unità; o tremila, ottocento, venti, quattro.*

Se il numero ha più di quattro cifre, si divide mentalmente in classi o gruppi di tre cifre cominciando da destra, avvertendo che l'ultimo gruppo a sinistra può contenere una o due cifre. Si enuncia dopo ogni gruppo come se fosse solo cominciando dalla sinistra, dando a ciascuno il nome della classe che esso rappresenta. — Esempio: sia il numero 64320428.

Si dividerà così: 64 320 428. Vi sono tre classi: la classe delle unità, quella delle migliaia e quella dei milioni. — Diremo dunque, cominciando dalla sinistra: 64 *milioni* 320 *mila* 423 *unità.*

Regola per scrivere un numero dettato.

27. *Per scrivere facilmente un numero dettato in linguaggio ordinario, si scrivono prima, cominciando dalla sinistra, le unità della classe la più elevata, e alla destra ognuna delle altre classi, come se fosse sola, per ordine di grandezza, avendo cura di sostituire con zeri le unità intermediarie che mancano, affinchè ogni classe sia composta di tre cifre.*

Esempio: — *Quindici milioni, diciotto mila, settecento quattro.* — Si scriverà: 15 018 704. — Lo zero nel secondo gruppo sostituisce le centinaia di migliaja, e nel primo gruppo le diecine semplici.

Cifre Romane.

28. I Romani non avevano cifre apposite per la scrittura dei numeri, ma usavano le lettere del loro alfabeto, disposte in un modo convenuto.

Ecco in numeri principali colla loro corrispondenza in cifre arabe :

I,	V,	X,	L,	C,	IↃ,	CIↃ,	IↃↃ,	CCIↃↃ
1,	5,	10,	50,	100,	500,	1000,	5000,	10000,
oppure —	—	—	—	—	D,	M,	— —	— — —

Per indicare i numeri intermedi si servivano degli stessi caratteri, con questa convenzione, cioè: che un carattere di minor valore posto dopo s' intendeva, aggiunto e posto innanzi, s' intendeva sottratto. — Esempi :

II,	III,	IV,	VI,	VII,	VIII,	IX,	XI,	XII,	XIV,	XV,
2,	3,	4,	6,	7,	8,	9,	11,	12,	14,	15,

XVI,	XIX,	XX,	XXX,	XL,	LX,	XC,	CXX,	MDCCCLXIV.
16,	19,	20,	30,	40,	60,	90,	120,	1864.

Ponendo una lineetta orizzontale sopra una o più lettere, si rende il valore da esse rappresentato mille volte più grande. — Così $\overline{X}$ significa 10000; $\overline{LXI}$ vale 61000.

Ponendone due, il numero diviene un milione di volte maggiore. — Così $\overline{\overline{D}}$ significa 500000000.

ESERCIZI

Sulla Numerazione parlata e scritta.

I. Leggere i numeri seguenti :
13 — 19 — 24 — 30 — 39 — 106 — 114 — 2463 — 2049 — 2003 — 5400 — 7001 — 8000 — 2003 — 86307 — 1708 — 33000 — 937004 — 80808 — 9370004 — 377000 — 5147819 — 4007006 — 25040742 — 800473432 — 354980093900 — 987560735780.

II. Decomporre nei loro diversi ordini di unità i numeri dell' esercizio precedente.

Esempi : Il numero 348 vale 300 più 40 più 8.

Il numero 5147819 vale 5000000 più 100000 più 40000 più 7000 più 800 più 10 più 9.

III. Scrivere in cifre i numeri seguenti :

Undici — Diciassette — Cinquanta — Centuno — Duecentosei — Trecentodiciannove — Milleventidue — Tremilaottantanove — Ottomilanovecentosei — Undicimila trecento — Cento cinquantaseimila trenta — Un milione novantamila otto — Sei milioni quarantamila trecentosei — Un miliardo — Tredici bilioni quarantacinque milioni ottomila nove ec.

IV. Scrivasi la serie naturale dei numeri 1, 2, 3, 4, 5, ec. senza separare con virgole le differenti cifre, e si cerchi la 378esima cifra di questa serie.

V. Qual'è il più piccolo numero di cinque cifre? — Qual'è il più grande fra i numeri di otto cifre?

VI. Quanti numeri vi sono di tre cifre? — quanti di quattro cifre? — quanti di nove cifre?

VII. Leggere i numeri romani seguenti:
IX — XI — XXIX — XL — XC — CX — CIↃↃ — CCIↃ — CM — MC — MIX — DMCCLII — VIII — DIX — CCCIV — CCLIX — MVIII — MDCCLXXXIX — $\overline{L}$ — $\overline{LXV}$ — $\overline{\overline{X}}$.

VIII. Scrivere in cifre romane i numeri:
18, 29, 34, 41, 57, 69, 75, 88, 99, 101, 402, 5000, 328, 699, 1860, 5004, 4000, 50000000, 100000000.

Operazioni fondamentali dell'Aritmetica.

29. Il *Calcolo* è l'arte di comporre o decomporre i numeri per mezzo di diverse operazioni. — Il calcolo si limita alla pratica di queste operazioni; l'aritmetica vi aggiunge la teoria.

Le operazioni fondamentali dell'aritmetica son quattro, cioè: *Addizione, Sottrazione, Moltiplicazione e Divisione.*

ADDIZIONE DEI NUMERI INTERI

30. L'*Addizione* è una operazione che ha per oggetto di riunire più numeri *della stessa specie* in un solo, che si chiama *Somma* o *Totale.* — I numeri da sommarsi diconsi *addendi* o *termini.*

Per indicare che più numeri devono essere sommati, si separano con una crocetta (+) che si enuncia *più.*

Così: 8 + 5, significa 8 *più* 5.

31. Una espressione composta di due quantità separate da due lineette orizzontali e parallele (=) dicesi *uguaglianza*, ed il segno = si legge *uguale a.*

Esempio: $8 + 5 = 13$ è una uguaglianza, la quale si legge: 8 *più* 5 *uguale a* 13.

Le due quantità separate dal segno $=$ si dicono *membri* dell'uguaglianza, e chiamasi *primo membro* la quantità posta alla sinistra del segno, *secondo membro* quella posta alla destra.

La somma non cangia, qualunque sia l'ordine dei termini.

Così $3 + 4 = 4 + 3 = 7$.

Infatti $3 + 4 = (1 + 1 + 1) + (1 + 1 + 1 + 1) = (1 + 1 + 1 + 1) + (1 + 1 + 1) = 4 + 3$.

Parimente,

$3+4+2=2+3+4=4+2+3=4+3+2=2+4+3=3+2+4=9$.

Perchè, considerando primieramente la somma dei due termini $3 + 4$ come un sol termine, cioè come effettuata, per la dimostrazione precedente si ha:

$$3 + 4 + 2 = (3 + 4) + 2 = 2 + (3 + 4) = 2 + 3 + 4;$$

quindi si avrà pure:

$$3 + 4 + 2 = 3 + (4 + 2) = (4 + 2) + 3 = 4 + 2 + 3;$$

ed essendo $3+4=4+3$, sarà anche $3+4+2=4+3+2$ (1)

Finalmente

$$4+3+2=(4+3)+2=4+(3+2)=2+4+3=3+2+4;$$

dunque anche

$$3 + 4 + 2 = 2 + 4 + 3 = 3 + 2 + 4 \text{ (2)}.$$

Se i termini fossero più di quattro, la dimostrazione si farebbe nello stesso modo, considerando la somma di due o più termini come effettuata.

Altra Dimostrazione

Si vuol provare che

$$3+4+2=2+3+4=4+2+3=4+3+2=2+4+3=3+2+4$$

Infatti $3+4+2=1+1+1+1+1+1+1+1+1$.

$$3+4+2=(1+1)+(1+1+1)+(1+1+1+1)=2+3+4$$
$$3+4+2=(1+1+1+1)+(1+1)+(1+1+1)=4+2+3$$
$$3+4+2=(1+1+1+1)+(1+1+1)+(1+1)=4+3+2$$
$$3+4+2=(1+1)+(1+1+1+1)+(1+1+1)=2+4+3$$
$$3+4+2=(1+1+1)+(1+1)+(1+1+1+1)=3+2+4.$$

(1) È ciò per l'*assioma* che *aggiungendo quantità uguali a quantità uguali i resultati sono uguali.*

Assioma è una verità evidente di per sè stessa.

(2) Per l'assioma che *due quantità uguali a una terza sono eguali fra loro.*

Diversi casi dell'Addizione.

32. Nell'Addizione si distinguono due casi:

1.° *Addizione dei numeri di una sola cifra.*

2.° *Addizione dei numeri di più cifre.*

33. Primo caso. — Sia proposto di trovare la somma dei numeri 7, 5, 2, 4.

Scriveremo questi numeri di seguito l'uno all'altro separandoli col segno +. Quindi, cominciando dalla sinistra, li aggiungeremo successivamente, dicendo: 7 più 5 è uguale a 12; 12 più 2 è uguale a 14; 14 più 4 è uguale a 18.

Dunque $7 + 5 + 2 + 4 = 18$.

34. Secondo caso — L'addizione dei numeri di più cifre riposa sopra il seguente principio: *la somma di due o più numeri è uguale alla somma delle diverse parti in cui essi possono decomporsi.*

Questo principio è evidente, perchè il resultato che così si ottiene conterrà l'insieme di tutte le parti dei numeri dati, e sarà per conseguenza la loro somma.

Esempio: Si debbano sommare i due numeri 3456 e 8721.

Decomponendo questi due numeri in migliaia, centinaia, diecine ed unità, avremo:

$$3456 = 3000 + 400 + 50 + 6.$$
$$8721 = 8000 + 700 + 20 + 1.$$

Ora, facendo la somma delle parti corrispondenti, cioè delle unità, delle diecine, delle centinaia e delle migliaia, diremo: 6 + 1 unità fanno 7 unità; 5 + 2 diecine fanno 7 diecine; 4 + 7 centinaia fanno 11 centinaia, ossia 1 centinaio e 1 migliaio; 3 + 8 migliaia fanno 11 migliaia, più 1 ottenuto dalla somma precedente, 12 migliaia. — La somma richiesta è dunque 12 *migliaia*, più 1 *centinaio*, più 7 *diecine*, più 7 *unità*, cioè 12177.

35. Da ciò si deduce la regola seguente:

Per sommare più numeri si scrivono gli uni sotto gli altri, unità sotto unità, diecine sotto diecine, centinaia sotto centinaia ec. Ciò fatto, si comincia l'operazione dalla destra, *facendo successivamente la somma delle unità semplici della prima colonna, poi quella delle diecine, indi quella delle centinaia ec., avendo cura di aggiungere alla colonna delle diecine, le diecine provenienti dalla*

somma delle unità: alla colonna delle centinaia, le centinaia provenienti dalla somma delle diecine, e così di seguito, sino all' ultima colonna, ove si scrive la somma tale quale si trova.

Applichiamo questa regola ad un esempio.

Si debbano sommare i numeri 4832, 54, 492, 7255.

SPIEGAZIONE.	OPERAZIONE
Scriveremo i numeri dati in colonna, e diremo, cominciando dalle unità: 2 più 4 fa 6, più 2 fa 8, più 5 fa 13: scrivo 3 *unità* e ritengo una diecina. — 3 più 1 che porto fa 4, più 5 fa 9, più 9 fa 18, più 5 fa 23: segno 3 *diecine* e ritengo 2 centinaia ec. — Continuando così, si trova per somma 12633.	4832 54 492 7255 ——— 12633

Prova dell' Addizione.

36. Per *prova* di una operazione s' intende una seconda operazione, che serve di riscontro alla prima.

Per far la prova di un' Addizione, si ricomincia la operazione dalla destra, sommando ogni colonna di basso in alto, se la prima volta si è cominciato dall' alto in basso; se trovasi lo stesso resultato, si ha forte ragione di credere che l' operazione sia esatta.

ESERCIZI

Sull' Addizione dei numeri interi.

IX. Effettuare le seguenti addizioni:
(8 + 5 + 9 + 4 + 7 + 2). — (4 + 9 + 3 + 10 + 12). — (213 + 327). — (516 + 617 + 478). — (3246 + 1800). — (184 + 140 + 37800). — (273 + 9 + 15 + 23784). — (105 + 7428 + 342 + 5006 + 316 + 4 + 7811). — (5190 + 415 + 97836 + 718 + 4900 + 5007362). —

X. Verificare le uguaglianze

36407 + 829 + 95036 + 804 = 133076.

700548 + 897597 + 6588 + 69764 + 407300 + 987847 + 1207046 = 4276690.

PROBLEMI

1. Un mercante deve pagare successivamente le tre somme seguenti: lire 4782, lire 23078 e lire 947. — Quanto dovrà sborsare in tutto?

Soluzione — Il problema consiste nel trovare la somma totale che deve pagare il mercante; ora essa si compone delle tre somme parziali cognite; quindi per avere la somma totale, debbo riunire in una sola le tre quantità 4782, 23078 e 947. — Dispongo dunque questi numeri secondo la regola (n. 35) e sommo.

Operazione

$$\begin{array}{r} 4782 \\ 23078 \\ 947 \\ \hline 28807 \end{array}$$

R. — Il totale 28807 esprime la somma di lire che deve sborsare il mercante. (1)

2. Tre giuocatori hanno perduto, l'uno lire 109, l'altro lire 37, e il terzo lire 126. — Quanto hanno perduto in tutto?

R. — Perdita totale: lire 272.

3. Si vuol sapere qual somma avesse avuto in prestito una persona che ha pagato lire 345, e che deve ancora lire 125.

R. — Somma: lire 470.

4. Un tale divide il suo patrimonio fra i suoi quattro figli: dà al maggiore lire 8540, al secondo lire 6210, al terzo Lire 4000, al quarto lire 3908. — A quanto ascende il patrimonio del padre?

R — Patrimonio: lire 22658.

5. La città di Napoli ha consumato in un anno per lire 1244527 di formaggio, lire 8387276 di volatili, lire 541745 di pesce. — A quanto ascende la spesa di Napoli per questi generi soltanto?

R — Lire 10173548.

6. Paolo è nato nel 1849: a quel'epoca avrà 30 anni?

R. — Avrà 30 anni nel 1879.

7. Una casa è costata di compra lire 4351; si è pagato di più per restauri: al fabbro lire 46, al legnaiuolo lire 103, al muratore lire 82; qual è il costo della casa dopo i restauri?

R. — Costo: lire 4582.

8. Un viaggiatore ha camminato quattro giorni; il primo per 8 ore, il se-

(1) Nella soluzione dei problemi l'alunno dovrà sempre far precedere il *ragionamento* alla *operazione*, come in questo esempio.

condo per 9 ore, e gli ultimi due giorni 3 ore di piú del secondo. — Quante ora ha camminato?

R. — Ore 41.

9. Una persona è morta all' età di 34 anni; essa era nata nel 1809; qual fu l' anno della sua morte?

R. — L' anno richiesto è il 1843.

10. Due cacciatori hanno ucciso 10 quaglie, 6 beccacce, 8 pernici; essi avevano ucciso il giorno avanti 5 pernici, 12 quaglie, e 7 beccacce. — Quanti uccelli in tutto hanno ucciso? — quanti di ciascuna specie?

R. — 48 uccelli in tutto. — Quaglie 22, beccacce 13, pernici 13.

11. Un libraio ha nel suo magazzino cinque scaffali pieni di libri; si contano 125 volumi nel primo, 312 nel secondo, 154 nel terzo, 218 nel quarto, 72 nel quinto; quanti volumi possiede il libraio?

R. — Volumi 881.

12. Enrico IV nacque nel 1553, salì al trono a 36 anni, e morì dopo aver regnato anni 21. — Qual fu l' anno della sua morte?

R. — L' anno cercato è il 1610.

13. Un padre marita due ragazze e un giovanotto; dà lire 5400 alla maggiore delle figlie, lire 3100 alla seconda, e al giovanotto tanto, quanto alle due ragazze insieme; qual somma ha sborsato il padre?

R. — Lire 17000.

14. Un tale vuol circondare uno stabile con un fosso; egli ne misura i contorni, e trova le seguenti lunghezze: 34 metri, più 56, più 17, più 87, più 9, più 105. — Quale sarà la lunghezza del fosso?

R. — Metri 308.

15. Un servitore ha speso lire 53 per un abito, lire 16 per un paio di pantaloni, lire 9 per un gilè; gli restano lire 27; qual somma aveva avanti di fare queste spese?

R. — Lire 105.

16. Una cometa è comparsa nel 1835; si sa che il suo ritorno deve aver luogo dopo 76 anni; in qual anno comparirà?

R — Comparirà nel 1911.

17. Una mercanzia costa lire 263; quanto bisognerà rivenderla per guadagnarvi lire 51?

R. — Lire 314.

18. Un campagnolo parte da una città alle 9 del mattino per andare al suo villaggio: gli bisognano 7 ore per fare questo tragitto, si domanda a qual' ora vi giungerà.

R. — Alle ore 4 pomeridiane.

19. Una squadra è composta di 4 Vascelli, 2 Fregate, e 3 Brik, i Vascelli portano ciascuno 500 uomini e 120 cannoni, le Fregate portano insieme 400 uomini

e 180 cannoni, e i Brik ognuno 100 uomini e 12 cannoni. — Far conoscere la forza della Squadra in uomini ed in cannoni.

R. — Uomini 2700. — Cannoni 696.

20. Le stelle visibili ad occhio nudo sono classate per ordine di splendore; la prima classe ne contiene 20 circa, la seconda 65, la terza 190, la quarta 425, la quinta 1100, la sesta 3200. — Qual è in circa il numero delle stelle visibili ad occhio nudo?

R. — 5000.

21. Tre operai si sono divisi una somma: il primo ha avuto lire 25, il secondo lire 11 più del primo, e il terzo lire 14 più del secondo. — Qual'è la parte di ciascuno e la somma divisa?

R. — La parte del 2.o è lire 36, del 3.o lire 50. — La somma divisa è lire 111.

22. Un uomo si è ammogliato all'età di 27 anni. Egli ha perduto la moglie 12 anni dopo. Rimasto vedovo durante 5 anni, ha preso una seconda moglie colla quale ha vissuto 7 anni, ed egli stesso è morto 11 anni dopo. — Si domanda a quale età egli morì.

R. — All'età di 62 anni.

23. Un operaio ha fatto in 12 giorni 48 metri di lavoro, che gli sono stati pagati lire 240. In 8 giorni ne ha fatto 32 metri, e gli sono stati pagati lire 160. Finalmente, in 6 giorni ne ha fatto 25 metri, e gli sono stati pagati lire 104. — Si domanda quanti giorni ha lavorato, quanti metri di lavoro ha fatto, e quanto ha ricevuto in tutto.

R. — Giorni 26; Metri 105; lire 504.

24. Nell'anno decorso entrarono in Grenoble 904721834742017332 litri di vino, in Lione 8072389452642351498668 litri, in Parigi 612375107558762345844000 litri. — Si trovi il numero totale dei litri, e si conoscerà il numero prodigioso di combinazioni differenti che, secondo il calcolo di More, si può fare colle 24 lettere dell'alfabeto.

R. — Litri 620448401733239439360000 e combinazioni.

25. Dalla creazione del mondo al diluvio corrono 17 secoli, dal diluvio alla fondazione di Atene 18 secoli, dalla fondazione di Atene a quella di Roma 7 secoli, dalla fondazione di Roma a Gesù Cristo 8 secoli, da Gesù Cristo sino ai nostri giorni 19 secoli. — Quanti secoli corrono dalla creazione del mondo fino ai nostri giorni?

R. — Secoli 69.

26. I dipartimenti più popolati della Francia sono: il dipartimento della Senna che ha 1300434 abitanti, quello del Nord che ne ha 1045384; quello del Reno 512842; quello della Senna-Inferiore 739614 e quello del Basso-Reno 584211. — Si dimanda qual'è la popolazione di questi cinque dipartimenti.

R. — Abitanti 4182485.

27. Secondo il censimento fatto in Italia il 31 Decembre 1863, le antiche pro-

vincie contenevano 4185690 abitanti, la Lombardia 3157665, l'Emilia 2034001, l'Umbria e le Marche 1411517, la Toscana 2000267, le provincie meridionali 9315719. — Qual'era in quel tempo la popolazione di tutto il regno?

R. — Abitanti 22104789.

28. I primi dieci patriarchi, toltone Enoc, sono quelli che più vissero su questa terra. Adamo visse 18 anni più di Set, suo figlio; Set visse 912 anni; Enos 905; Cainan 910, Malaleel 895, Jored 962, Enoc 365, Matusalem 969, Lamec 777, Noè 950. — Quanti anni vissero questi dieci patriarchi uniti insieme?

R. — Anni 8575.

29. La più antica notizia che si abbia intorno all'arte dell'orefice risale fino all'anno 1833 avanti G. Cristo. Narra la S. Scrittura che Eliezer, mandato da Abramo a cercare una moglie per Isacco, scontratosi in Rebecca che gli pareva esser la destinata da Dio, le fece dono di orecchini e braccialetti d'oro — Quanti anni sono che ciò accadde?

R. — Anni 3691.

30. Firenze ha 116000 abitanti, Lucca ne ha 24000, Livorno 82000, Pisa 20000, Siena 20000, Arezzo 11000, Pistoia 13000, Prato 10000, Pescia 5000, Pontremoli 9000, Colle 5000, Montalcino 3000, Cortona 4000, Montepulciano 10000, San Sepolcro 6000, Volterra 4000, Viareggio 6000, San Miniato 3000, Pienza 2000, Modigliana 3000, Fiesole 1000, Chiusi 3000, Massa 2000. — Qual è il numero degli abitanti sparsi in queste città della Toscana?

R — Abitanti 362000.

SOTTRAZIONE DEI NUMERI INTERI.

37. La *Sottrazione* è una operazione che ha per oggetto di togliere un numero da un altro *della stessa specie*, per sapere di quanto il più grande sorpassa il più piccolo. — Il numero maggiore si chiama *diminuendo*; il numero minore dicesi *diminutore*: ed il resultato della operazione *resto* o *differenza*.

Per indicare la sottrazione di due numeri si scrive il più grande e quindi il più piccolo, separandoli con una lineetta orizzontale (—), che si enuncia *meno*. — Così: 12 — 7 significa 12 *meno* 7.

Abbiamo veduto (n.° 34) che il resultato dell'addizione rappresenta l'insieme di tutti i numeri dati; quindi esso può considerarsi come un *tutto* composto di tante *parti* quanti sono i numeri dati. Il resultato della sottrazione, all'opposto, nasce dal numero maggiore diminuito del numero minore, ed è chiaro che esso aggiunto al minore deve riprodurre il maggiore. Per conseguenza, il numero maggiore può riguardarsi come un *tutto*, le cui parti sono il numero minore ed il resto.

In virtù di queste due considerazioni, l'addizione e la sottrazione possono definirsi anche nel modo seguente:

L'addizione è quell'operazione la quale ha per oggetto, essendo date le parti, di trovare il tutto.

La sottrazione è quell'operazione la quale ha per oggetto, essendo dato il tutto ed una delle sue parti, di trovare l'altra parte.

Segue da queste due definizioni che l'addizione e la sottrazione sono due operazioni l'una inversa dell'altra.

Diversi casi della Sottrazione.

38. Nella sottrazione si distinguono tre casi:

1.° *Il diminuendo e il diminutore sono numeri di una sola cifra.*

2.° *Il diminuendo e il diminutore sono due numeri composti, ma tali, che tutte le cifre del diminuendo sono più grandi delle cifre corrispondenti del diminutore.*

3.° *Il diminuendo e il diminutore sono due numeri qualunque.*

39. Primo caso. — Debbasi sottrarre 5 da 8.

È chiaro che togliendo successivamente da 8 cinque volte l'unità resteranno 3 unità.

Infatti: $8 - 1 = 7$; $7 - 1 = 6$; $6 - 1 = 5$; $5 - 1 = 4$; $4 - 1 = 3$. — Dunque $8 - 5 = 3$.

40. Secondo caso. — Il secondo caso della sottrazione riposa sul seguente principio: *Se due numeri sono decomposti in egual numero di parti, e tutte le parti del maggiore sorpassano le parti corrispondenti del minore, si ottiene la differenza di questi due numeri, sommando le differenze delle parti corrispondenti.*

Esempio. — Dal numero 783 si debba togliere il numero 521.

Questi due numeri si possono decomporre in centinaia, diecine e unità.

Quindi:

$$783 = 700 + 80 + 3,$$
e
$$521 = 500 + 20 + 1.$$

Ora, la differenza fra 3 unità e 1 unità, è 2 unità; la differenza fra 8 diecine e 2 diecine, è 6 diecine; la differenza fra 7 centinaia e 5 centinaia, è 2 centinaia.

Sommando le differenze delle parti, avremo la differenza totale, cioè 2 *centinaia*, più 6 *diecine*, più 2 *unità*; ossia 262.

41. In pratica si scrive il diminutore sotto il diminuendo, e si dice: 3 meno 1 uguale 2, si scrive 2; 8 meno 2 uguale 6, si scrive 6; 7 meno 5 uguale 2, si scrive 2; o più brevemente: dall'1 al 3, 2; dal 2 all'8, 6; dal 5 al 7, 2. La differenza è 262.

783
521
262

42. Terzo caso. — Il terzo caso riposa sul seguente principio: *La differenza di due numeri non cambia, aumentando o diminuendo l'uno e l'altro ugualmente.*

Esempio. — La differenza fra 8 e 5 è 3. Aggiungendo, per esempio, 2 all'8 e al 5, si ha 10 e 7, la cui differenza è sempre 3.

Applichiamo questo principio ad un esempio.

Si debba sottrarre 28624 da 32385.

Scriveremo questi due numeri l'uno sotto l'altro, e diremo: 4 unità sottratte da 5 unità, resta 1 unità; 2 diecine sottratte da 8 diecine, restano 6 diecine, 6 centinaia da 3 centinaia non possono togliersi; aggiungiamo un migliaio o 10 centinaia al numero 3, e avremo 13 centinaia, da cui sottraendo 6 centinaia, restano 7 centinaia. — Ora, pel principio precedente, affinchè la differenza dei due nunon sia cambiata, avendo aggiunto un migliaio al diminuendo, bisogna che si aggiunga anche al diminutore; quindi continueremo l'operazione, come se il diminutore avesse 9 per cifra delle migliaia; e diremo 9 migliaia da 2 migliaia non possono togliersi: dunque aggiungeremo una diecina di migliaia al numero superiore, con che avremo 12 migliaia: da 12 migliaia togliendo 9 migliaia, restano 3 migliaia. — Avendo così di nuovo aumentato il numero superiore, converrà aumentare d'altrettanto il numero inferiore; per conseguenza termineremo l'operazione dicendo: 3 diecine di migliaia sottratte da 3 diecine di migliaia, non lasciano resto; in guisa che la differenza richiesta è 3761.

32385
28624
3761

43. Dagli esempi dimostrati risulta, che: *per fare una sottrazione si scrive prima il numero più piccolo sotto il più grande, unità sotto unità, diecine sotto diecine, centinaia sotto centinaia ec. — Indi, tirata una linea al di sotto, si comincia* dalla destra *togliendo ogni cifra inferiore dalla cifra superiore corrispondente, e si scrive ogni resto al di sotto; si mette zero quando non resta nulla. — Se una delle cifre inferiori è più grande della cifra superiore corrispondente, si aumenta questa di* 10, *e si aggiunge* 1 *alla cifra inferiore della colonna seguente.*

Esempio pratico.
Calcolare l'espressione 35468 — 18709.

Operazione	Spiegazione
35468 18709 16759	Scritti i numeri uno sotto l'altro si dirà: da 8 levar 9 non si può: si unisce una diecina all'8 e si ha 18; da 18 levare 9 resta 9. — Da 6 levare 1, resta 5; da 14 levare 7, resta 7; da 15 levar 9, resta 6; da 3 levar 2, resta 1. O più brevemente: dal 9 al 18, 9 e porto 1; dall'1 al 6, 5; dal 7 al 14, 7 e porto 1; dal 9 al 15, 6 e porto 1; dal 2 al 3, 1.

Prova della Sottrazione.

44. Per fare la prova d'una sottrazione bisogna sommare la differenza trovata col diminutore; se la somma è uguale al diminuendo, l'operazione è esatta.

Esempio: 467820 — 129978.

Operazione.

Diminuendo	467820
Diminutore	129978
Differenza	337842
Prova	467820

ESERCIZI

Sulla sottrazione dei numeri interi.

XI. Effettuare le seguenti sottrazioni:
(583 — 241); (6375 — 2134); (5682 — 3211); (6043 — 5032); (5738 — 2869); (5000 — 641); 60104 — 17083); (8734 — 25); (9300100 — 1708320); (43203328 — 1989994).

XII. Verificare le uguaglianze

$$205634 - 176382 = 29252.$$

$$3100628485 - 2827433385 = 273195100$$

XIII. Calcolare le espressioni:

$(320 + 4670 + 12) - (180 + 27 + 10)$.

$(81240 + 73) - (120 + 12 + 5) - 80 + 4$.

XIV. Verificare l' uguaglianza

$3200 - 800 + 160 - 1150 - 840 + 10 - 580 = 0$.

XV. Dati due numeri, se ne calcoli la somma e la differenza. Dipoi si dica quali sono i resultati ottenuti, aggiungendo la differenza alla somma, e togliendo la differenza dalla somma.

PROBLEMI

31. Un padre, morendo, lascia a suo figlio lire 7858 sulle quali deve prelevarsi la somma di lire 3442 per pagare alcuni creditori. — Domandasi quanto resterà al figlio, dopo aver tolto quest'ultima somma.

Soluzione. È evidente che quando il figlio avrà pagato il debito di suo padre, gli resterà ancora la somma lasciata *meno* la somma dovuta e pagata da lui, vale a dire gli resteranno lire 7858 — 3442, o in altre parole, gli resterà ciò che manca a 3442 per formare 7858. Dunque è data una somma e una delle sue parti e devesi trovare l'altra parte: quindi dovrà togliersi la più piccola dalla più grande, e il resto, che è la parte cercata, esprimerà quanto rimane al figlio della eredità del padre.

Operazione

$$\begin{array}{r} 7858 \\ 3442 \\ \hline 4416 \end{array}$$

Dunque al figlio resteranno L. 4416.

32. Un tale aveva prestato Lire 749, egli ebbe un acconto di L. 568. — Quanto deve ancora ricevere?

R. — Lire 181.

33. Un giocatore ha vinto Lire 127, ma il giorno avanti aveva perduto L. 206 — Si dica ciò che ha perduto definitivamente.

R. — Perdita: Lire 79.

34. Un reggimento aveva 2400 uomini avanti la battaglia; dopo, questo numero era ridotto a 1538. — Si domanda qual perdita provò il reggimento in questa zuffa.

R. — Perdita: 862 uomini.

35. Una ruota ha fatto 852 giri in un minuto, un'altra ruota ha fatto 543 giri nello stesso tempo: quanti di più ne ha fatti la prima?

R. — Ne ha fatti di più 309.

36. La stampa fu inventata nel 1445; la polvere da cannone, nel 1474 — Si chiede qual tempo è trascorso fra queste due epoche.

R. — Anni 29.

37. Francesco I, re di Francia, nacque nel 1494 e morì nel 1547; quanto tempo visse?

R. — Visse anni 53.

38. Un naviglio ha camminato 35 giorni: gli bisognano 52 giorni pel suo viaggio; quanti giorni dovrà ancora camminare?

R. — Giorni 17.

39. Da una pezza di panno lunga 31 metri, sono stati tolti 5 metri per un abito e 2 metri per pantaloni; di quale lunghezza è ridotta la pezza?

R. — Lunghezza: Metri 24.

40. Un artista, che si era incaricato della esecuzione d'un lavoro, ha impiegato 11 giorni a farlo. — Si domanda qual giorno avesse cominciato, sependo che egli ha finito il 27 del mese.

R. — Il lavoro fu cominciato il 16 del mese.

41. Un prigioniero ha calcolato la durata della sua prigionia, che ha trovato essere di 240 giorni. Da quel momento sono trascorsi 129 giorni. — In quanto tempo avrà subito la sua pena?

R. — In giorni 111.

42. Un militare ha ottenuto un permesso di 8 giorni per tornare al suo paese. — Si dica qual giorno cominciò il permesso, sapendo che è finito il 31 del mese.

R. — Cominciò il di 23.

43. Una città ha consumato 165 buoi, 2342 montoni, 511 maiali; essa aveva consumato l'anno avanti 1530 montoni, 435 maiali, e 124 buoi. — Dire qual differenza vi ha nel numero totale delle bestie, ed in quello di ciascuna specie.

R. — Differenza totale: 929 bestie.

Differenza nei buoi 41, nei montoni 812, nei maiali 76.

44. Edoardo era debitore di Lire 7000. Egli fa uno sborso consistente in due biglietti di banca di lire 500 ciascuno, più una somma di L. 3400 in contanti; domandasi di quanto Edoardo è rimasto debitore.

R. — Debito: Lire 2600.

45. Una scuola era divisa in tre classi, e contava 112 alunni. La prima classe era composta di 31 alunni; la seconda di 18 più della prima. — Cercare quanti ne conteneva la terza.

R — Ne conteneva 32.

46. Una persona lascia morendo una somma di lire 237000, della quale lire 23769 debbono darsi ai poveri, lire 14738 agli asili infantili e lire 26548 agli ospizi marini. — Si domanda quanto resta agli eredi.

R. — Lire 171945.

47. Due negozianti hanno cominciato lo stesso commercio, ciascuno colla

somma di L. 98000. Nel primo anno il primo negoziante ha guadagnato L. 25000; nel secondo anno, ha guadagnato L. 84709; nel terzo anno, ha guadagnato L. 158942. Il secondo negoziante, al contrario, ha perduto nel primo anno L. 1478: nel secondo anno ha guadagnato L. 7400, e nel terzo anno ha perduto L. 584. — Si domanda: 1° Qual è il capitale che ciascun negoziante ha in commercio — 2° Di qual somma l' uno è più ricco dell'altro.

R — Il capitale del primo è L. 366651; quello del secondo è L. 103338. — Il primo è più ricco del secondo di L. 263313.

48. Secondo alcuni geografi, l' estensione di tutte le terre conosciute è distribuita nel modo seguente. Il Continente antico ha in Europa 9578189 Chilometri quadrati, in Asia 41556927, in Africa 29149519; il nuovo Continente consta di 38223594 Chilom. quad; il Continente australe, di 10631001. Tutta la superficie del globo, comprese le acque, è di 509334705 Chilom. quad. — Si domanda: 1° Qual' è la estensione totale di tutte le terre — Quale l' estensione delle sole acque — Di quanto l' estensione del Continente antico supera quella del nuovo e dello australe.

R. — Estensione delle terre: 129139230 Chilom. quad. — Estensione delle acque: 380195475. — L' estensione del continente antico supera quella del nuovo di 42061041 Chilom. quad; e quella dell' australe di 69653634 Chilom. quad.

MOLTIPLICAZIONE DEI NUMERI INTERI.

45. La *Moltiplicazione* è un' operazione che ha per oggetto di ripetere un numero, chiamato *moltiplicando*, tante volte quante sono le unità contenute in un altro numero, che dicesi *moltiplicatore*. — Il resultato di questa operazione è detto *prodotto*. — Il moltiplicando e il moltiplicatore sono chiamati *fattori*. — La moltiplicazione s'indica con una crocetta inclinata (×) o con un punto, e ambedue questi segni significano *moltiplicato per*. — Così 8 × 4 e 8 . 4 si leggono 8 *moltiplicato per* 4. In pratica si dice 8 *via* 4.

Diversi casi della Moltiplicazione.

46. Nella moltiplicazione distingueremo quattro casi, cioè:

1.° *Moltiplicando e moltiplicatore di una cifra*, per esempio 7 × 8.

2.° *Moltiplicando qualunque e moltiplicatore di una cifra*, per esempio 43 × 5.

3.° *Moltiplicando qualunque e moltiplicatore composto di una cifra significativa seguita da uno o più zeri*, per esempio 821 × 60.

4.° *Moltiplicando e moltiplicatore qualunque,* per esempio *pio* 1284 × 358.

47. Primo caso. — La moltiplicazione dei numeri di una sola cifra si eseguisce per mezzo della *tavola di Pitagora,* la quale contiene i prodotti dei primi dieci numeri, che bisogna imparare a memoria.

Tavola di Pitagora.

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
2	4	6	8	10	12	14	16	18	20
3	6	9	12	15	18	21	24	27	30
4	8	12	16	20	24	28	32	36	40
5	10	15	20	25	30	35	40	45	50
6	12	18	24	30	36	42	48	54	60
7	14	21	28	35	42	49	56	63	70
8	16	24	32	40	48	56	64	72	80
9	18	27	36	45	54	63	72	81	90
10	20	30	40	50	60	70	80	90	100

Questa tavola è formata di dieci linee orizzontali, la prima delle quali contiene i primi dieci numeri, la seconda il doppio di essi, la terza il triplo, la quarta il quadruplo ec.; e ognuna di queste linee si forma aggiungendo i numeri della prima linea ai numeri dell' ultima linea già scritti.

L'uso della tavola è facilissimo. — Vogliasi, per esempio, il prodotto di 8 per 6. — Si prende l' 8 nella prima linea orizzontale, e il 6 nella prima linea verticale: indi si percorrono queste due linee sino al punto del loro incontro, ove trovasi 48, che è il prodotto richiesto.

Infatti, moltiplicare 8 per 6, significa ripetere l'8 *sei* volte; quindi:

$$8 \times 6 = 8 + 8 + 8 + 8 + 8 + 8 = 48;$$

dal che si vede che la moltiplicazione non è altro che un'addizione di numeri uguali. Si troverebbe al modo stesso $7 \times 5 = 35$; $9 \times 10 = 90$ ec.

48. Quattro sono i principii, sui quali riposa la moltiplicazione.

1.° Principio. *Se il moltiplicando è la somma di più numeri, si ottiene il prodotto, moltiplicando successivamente ciascuno di essi pel moltiplicatore, e facendo la somma dei resultati.*

Debbasi moltiplicare la somma $3 + 5 + 2$ per 4.

Il prodotto richiesto sarà espresso da

$$3 \times 4 + 5 \times 4 + 2 \times 4.$$

Infatti, moltiplicare la somma $3 + 5 + 2$ per 4 significa ripeterla 4 volte; si ha dunque evidentemente l'uguaglianza (1):

$(3+5+2) \times 4 = 3+5+2+3+5+2+3+5+2+3+5+2$

ovvero (n.° 31):

$(3+5+2) \times 4 = 3+3+3+3+5+5+5+5+2+2+2+2;$

o ciò che è lo stesso:.

$(3 + 5 + 2) \times 4 = 3 \times 4 + 5 \times 4 + 2 \times 4.$

$$= 12 + 20 + 8 = 40.$$

Segue da questo principio che se il moltiplicando è composto di più ordini di unità, si ottiene il prodotto col moltiplicare separatamente le unità di ciascun ordine del moltiplicando pel moltiplicatore e facendo la somma dei resultati.

Così, se il moltiplicando è composto di 3 *centinaia*, 5 *diecine e* 2 *unità*, e il moltiplicatore è 4, il prodotto sarà 12 *centinaia* + 20 *diecine* + 8 *unità*, ossia $1200 + 200 + 8 = 1408$.

(1) Per indicare il prodotto di una somma di più numeri per un altro numero, si pone la somma fra parentesi. — Così il prodotto di $2 + 5 + 9 + 7$ per 3, s'indica così: $(2 + 5 + 9 + 7) \times 3$ e significa che ognuno dei numeri contenuti nella parentesi deve moltiplicarsi pel fattore posto fuori di essa.

2.° Principio. *Se il moltiplicatore è la somma di più numeri, per avere il prodotto basterà moltiplicare successivamente il moltiplicando per ciascuno di essi e sommare i resultati.*

Così, per moltiplicare 9 per 5 + 4, basterà moltiplicare 9 per 5, poi per 4, e fare la somma dei prodotti ottenuti; giacchè per ripetere un numero 5 + 4 volte, ossia 9 volte, basta ripeterlo prima 5 volte poi 4 volte e sommare i resultati.

Avremo dunque:

$$9 \times (5 + 4) = 9 \times 5 + 9 + 4 = 45 + 36 = 81.$$

Da questo secondo principio è facile dedurre che quando il moltiplicatore è composto di più ordini di unità, il prodotto si ottiene col moltiplicare il moltiplicando per le unità di ciascun ordine del moltiplicatore, e sommando i resultati.

Così, se il moltiplicatore è composto di 5 *diecine* e 4 *unità* e il moltiplicando è 9, il prodotto sarà 45 *diecine* + 36 *unità*, ossia 450 + 36 = 486.

3.° Principio. *Il prodotto di due numeri non cambia invertendo i fattori.*

Così, 4×5 sarà uguale a 5×4.

Infatti, decomponendo il 4 in 1 + 1 + 1 + 1, si ha: $4 \times 5 = (1 + 1 + 1 + 1) \times 5$; e pel 1° principio:

$$(1 + 1 + 1 + 1) \times 5 =$$
$$1 \times 5 + 1 \times 5 + 1 \times 5 + 1 \times 5 = 5 + 5 + 5 + 5,$$

ossia 5 ripetuto 4 volte, o 5×4.

4.° Principio. *Per moltiplicare un numero per* 10, *per* 100 *per* 1000 *ec. basta scrivere alla sua destra uno zero per* 10, *due zeri per* 100, *tre zeri per* 1000 *ec.*

Così, per avere il prodotto di 795 per 100 basterà scrivere due zeri alla destra di 795, e avremo: $795 \times 100 = 79500$.

Infatti, dopo la giunta dei due zeri, il valore relativo di ciascuna cifra si è reso *cento volte* più grande, e per conseguenza il numero è moltiplicato per 100. (Vedi n° 24.)

49. Stabiliti questi principii, dimostriamo gli altri casi della moltiplicazione.

Secondo Caso. — Debbasi moltiplicare 795 per 5.

Il moltiplicando 795 si può decomporre nella somma di 7 *centinaia*, più 9 *diecine*, più 5 *unità*.

Quindi, pel 1° principio, basterà moltiplicare per 5 le tre parti del moltiplicando, e sommare i resultati. Diremo dunque:

5 volte 5 unità, fanno 25 *unità;*

5 volte 9 diecine, fanno 45 *diecine;*

5 volte 7 centinaia, fanno 35 *centinaia.*

Il prodotto è dunque: 35 centinaia, più 45 diecine, più 25 unità, ossia

$$3500 + 450 + 25 = 3975.$$

In pratica l'operazione si dispone nel modo seguente

OPERAZIONE		SPIEGAZIONE
Moltiplicando	795	e si dice: 5 via 5 fa 25; si segna 5 e si porta 2. — 5 via 9 fa 45 e due di porto 47; si scrive 7 e si porta 4. — 5 via 7 fa 35, e 4 di porto 39.
Moltiplicatore	5	
Prodotto:	3975	

50. TERZO CASO. — Debbasi moltiplicare 573 per 4000.

Si avrà:

$573 \times 4000 = 573 \times (4 + 4 + 4 + 4 + 4 \ldots\ldots),$

ripetendo il 4 in parentesi *mille volte;* quindi (n.° 48 — 2°):

$573 \times 4000 = 573 \times 4 + 573 \times 4 + 573 \times 4 + 573 \times 4 \ldots,$

ripetendo *mille volte* il prodotto $573 \times 4 = 2292$; sostituendo nell'uguaglianza precedente a 573×4 questo suo valore, si ha $573 \times 4000 = 2292 + 2292 + 2292 + 2292 + \ldots$ ripetuto il 2292 *mille volte*; dunque

$573 \times 4000 = 2292 \times 1000 = 2292000$ (n°. 48 — 4°.)

Di quì la regola pratica:

Per moltiplicare un numero qualunque per un altro numero formato da una cifra significativa seguita da zeri, basta moltiplicarlo per quella cifra significativa, e scrivere a destra del prodotto tanti zeri, quanti sono a destra del moltiplicatore. — Così troveremo: $7283 \times 500 = 3641500.$

51. QUARTO CASO. — Sia proposto di moltiplicare 7458 per 379.

Il moltiplicatore 379 può decomporsi nella somma di 3 *centinaia*, più 7 *diecine*, più 9 *unità*. — Quindi, in virtù del 2° principio, per moltiplicare 7458 per 379, basterà ripeterlo 9 volte, poi 70 volte, e quindi 300 volte, e fare la somma dei resultati.

Ora, moltiplicando 7458 per 9, si ottiene il prodotto 67122

unità (n.° 49). Per moltiplicare 7458 per 70, sappiamo (n.° 50) che basta moltiplicarlo per 7 e scrivere uno zero alla destra del prodotto, cioè avremo 522060. Finalmente per moltiplicare 7458 per 300, si moltiplica per 3 e si aggiungono due zeri alla destra del prodotto, cioè avremo 2237400. Facendo la somma di questi tre prodotti parziali, si avrà il prodotto totale 2826582.

Dunque

$$7458 \times 379 = 2826582.$$

In pratica l'operazione si dispone così:

OPERAZIONE	SPIEGAZIONE
7458 379 67122 52206 22374 2826582	Scritti i due fattori uno sotto l'altro, come qui si vede, si moltiplica il 7458 per 9, ponendo la prima cifra del prodotto sotto la cifra delle unità. Si moltiplica poi il 7458 per 7, e si pone la prima cifra del prodotto sotto le diecine, omettendo così di scrivere uno zero alla sua destra. Si moltiplica quindi il 7458 per 3, ponendo la prima cifra del prodotto nella stessa colonna della cifra delle centinaia, trascurando di scrivere i due zeri alla sua destra. Si sommano i tre prodotti parziali, e si ha il prodotto totale richiesto.

Altro esempio.

Sia da moltiplicare 8342 per 5090.

OPERAZIONE	SPIEGAZIONE
8342 5090 750780 41710 42460780	Poichè il moltiplicatore non contiene *unità*, scrivesi uno zero nel primo posto a destra, cioè nella colonna delle unità. Indi si moltiplica 8342 per 9 e la prima cifra del prodotto scrivesi alla sinistra dello zero, cioè nella colonna delle diecine. E poichè il moltiplicatore non contiene *centinaia*, si moltiplica 8342 per 5, scrivendo la prima cifra di questo prodotto nella colonna delle migliaia. Si fa poi la somma ecc.

52. Dai ragionamenti precedenti si ricava la seguente regola generale:

Per moltiplicare due numeri interi l'uno per l'altro, scrivesi prima il moltiplicando e al di sotto il moltiplicatore in maniera, che

le cifre le quali esprimono unità dello stesso ordine si corrispondano, e si tira una linea orizzontale al di sotto. Ciò fatto, cominciasi l'operazione dalla destra, *moltiplicando successivamente tutto il moltiplicando per la cifra delle unità del moltiplicatore, poi per la cifra delle diecine, quindi per quella delle centinaia ec., avendo cura di porre la prima cifra d'ogni prodotto parziale nella stessa colonna di quella che serve di moltiplicatore. Si fa finalmente l'addizione di questi prodotti, e la loro somma è il prodotto totale cercato.*

Prova della Moltiplicazione.

53. Si fa la prova della moltiplicazione per mezzo di un'altra moltiplicazione, prendendo il moltiplicando pel moltiplicatore e il moltiplicatore pel moltiplicando. (Vedi 3.° principio).

Numero delle cifre del prodotto.

54. *Il numero delle cifre del prodotto è uguale alla somma delle cifre dei due fattori presi insieme, o eguale a questa somma diminuita di un'unità.*

Infatti, supponiamo che il moltiplicando abbia quattro cifre, che sia, per esempio, 2096, e che il moltiplicatore ne abbia tre.

Il moltiplicatore avendo tre cifre è *almeno* uguale a 100; dunque il prodotto considerato è *almeno* uguale al prodotto di 2096 per 100, che è 209600; per conseguenza il numero delle sue cifre è *almeno* uguale alla somma delle cifre dei fattori presi insieme, diminuita di 1.

In secondo luogo, il moltiplicatore è più piccolo di 1000; dunque il prodotto considerato è inferiore al prodotto di 2096 per 1000, vale a dire inferiore a 2096000; il numero delle cifre del prodotto non può dunque sorpassare la somma del numero delle cifre dei fattori.

Natura del prodotto.

55. *In qualunque moltiplicazione il prodotto si compone di unità della stessa specie di quelle del moltiplicando.*

Infatti, il prodotto non è altro che il moltiplicando ripetuto tante volte quante sono le unità del moltiplicatore (n.° 45), il quale

si considera sempre come un numero astratto; dunque le unità del prodotto sono della stessa specie di quelle del moltiplicando.

Quando si tratta di numeri *astratti*, abbiamo dimostrato (n.° 48 — 3°) che si può prendere il moltiplicando pel moltiplicatore, senza che il prodotto resti alterato. Ciò è vero quanto al *numero* delle unità, ma quanto alla loro *specie*, trattandosi di quantità *concrete*, la specie delle unità del prodotto è invariabilmente la stessa di quella delle unità del moltiplicando.

Per conseguenza, invertendo l'ordine dei fattori non bisogna dimenticare la specie delle unità del moltiplicando.

Così volendo, per esempio, sapere qual'è la somma necessaria per comprare 120 litri di vino a lire 3 il litro, bisognerebbe ripetere 3 lire 120 volte, perchè il prodotto deve esprimere lire: ma per più speditezza di calcolo conviene moltiplicare 120 per 3, avvertendo che il prodotto esprime la somma richiesta.

Questa osservazione è essenziale nella moltiplicazione dei numeri complessi, come vedremo a suo luogo.

Uso principale della Moltiplicazione.

56. L'uso principale della moltiplicazione è di far conoscere il valore totale di diversi oggetti, conoscendo il valore d'un solo di questi oggetti. — Esempio: *Qual è il costo di metri* 83 *di panno, sapendo che un metro vale Lire* 9? — È chiaro che se un metro costa lire 9, metri 83 costeranno 83 volte 9 Lire; per conseguenza si avrà $83 \times 9 = 747$ Lire, pel valore richiesto.

Prodotto di più fattori.

57. Si chiama *prodotto di più fattori* il numero che si ottiene moltiplicando il primo fattore pel secondo; poi il resultato ottenuto pel terzo fattore; quest' ultimo resultato pel quarto; e così di seguito.

Esempio: $3 \times 4 \times 6 \times 7$ significa: il prodotto di 3 per 4, che è 12, moltiplicato per 6, che dà 72, e questo resultato per 7, cioè 504.

Potenze d'un numero.

58. Si chiama *potenza d'un numero* il prodotto che si ottiene prendendo questo numero 2, 3, 4, 5, ec. volte come fattore. — Per

rappresentare una potenza d'un numero, si scrive al di sopra di esso, e un po' verso destra, il numero di volte che deve esser preso come fattore; il qual numero chiamasi *esponente della potenza.*

Così 5^2, significa che il 5 dev'essere moltiplicato per sè stesso, ossia dev'essere presso 2 volte come fattore; il 2 è l'esponente.

Il prodotto d'un numero per sè stesso chiamasi il suo *quadrato,* o la sua *seconda potenza.* Se il numero è preso 3 volte come fattore, il prodotto dicesi *cubo,* o *terza potenza;* in generale, se un numero si prende 4, 5, 6. . . . . volte come fattore, il prodotto che ne resulta chiamasi *quarta, quinta, sesta . . . . potenza* di questo numero.

Esempio: Le diverse potenze di 4, saranno: $4^2 = 4 \times 4 = 16$; $4^3 = 4 \times 4 \times 4 = 64$; $4^4 = 4 \times 4 \times 4 \times 4 = 256$; $4^5 = 4 \times 4 \times 4 \times 4 \times 4 = 1024$ ec. Da questo esempio si vede che *per inalzare un numero ad una data potenza* basta prendere il numero tante volte come fattore, quante sono le unità contenute nell'esponente. — Così 10 alla *quarta* potenza, sarà uguale a $10 \times 10 \times 10 \times 10 = 10000$.

TEOREMI

Relativi alla Moltiplicazione.

59. TEOREMA 1°. [1] *Si moltiplica una somma per una somma, moltiplicando successivamente ciascuna parte della prima per ciascuna parte della seconda, e facendo la somma dei resultati.*

Debbasi moltiplicare $(3 + 4) \times (2 + 7)$.

Io dico che avremo:

$$(3 + 4) \times (2 + 7) = 3 \times 2 + 3 \times 7 + 4 \times 2 + 4 \times 7.$$

Infatti, per moltiplicare una somma $(3 + 4)$ per un numero, basta (vedi n.° 48) moltiplicare ciascuna delle sue parti per questo numero e sommare i resultati.

Quindi, per ottenere il prodotto richiesto, si dovrà moltiplicare prima il 3 per $(2 + 7)$ poi il 4 per $(2 + 7)$ e sommare i prodotti.

[1] Per *Teorema* s'intende una verità che diviene evidente per mezzo d'un ragionamento, chiamato *dimostrazione.*

Avremo dunque:

$$(3+4)\times(2+7)=3\times(2+7)+4\times(2+7);$$

e pel 2° principio (vedi n°. 48):

$$3\times(2+7)+4\times(2+7)=$$
$$3\times 2+3\times 7+4\times 2+4\times 7:$$

cioè: $6+21+8+28=63$, come bisognava dimostrare (1).

60. Teorema 2.° *Per moltiplicare una differenza per un numero qualunque, basta moltiplicare i suoi due termini per questo numero.*

Debbasi moltiplicare la differenza $(8-3)$ per 4. Io dico che si avrà:

$$(8-3)\times 4=8\times 4-3\times 4=32-12=20.$$

Infatti, per definizione (vedi n.° 45) si ha:

$$(8-3)\times 4=(8-3)+(8-3)+(8-3)+(8-3)=8$$

ripetuto 4 volte, *meno* 3 ripetuto 4 volte; ossia $8\times 4-3\times 4$; come si doveva dimostrare (2).

61. Teorema 3.° *Un prodotto non cambia, invertendo i fattori.*

Questo teorema comprende tre casi.

1.° *Caso di due fattori.*

Si vuol provare che $3\times 2=2\times 3$.

Infatti si ha: $3\times 2=(1+1+1)\times 2=2+2+2=2\times 3$.

2.° *Caso di tre fattori.*

Si vuol provare che sono eguali i sei prodotti:

$$8\times 3\times 4;\quad 8\times 4\times 3;\quad 3\times 8\times 4;\quad 3\times 4\times 8$$
$$4\times 3\times 8;\quad 4\times 8\times 3.$$

Infatti,

$$8\times 3\times 4=8\times(1+1+1)\times 4=(8+8+8)\times 4;$$
$$=8\times 4+8\times 4+8\times 4=8\times 4\times 3;$$

dunque in un prodotto di tre fattori si possono invertire *gli ultimi due*, e il secondo prodotto è uguale al primo.

Ma nel primo prodotto si può cangiare l'ordine dei primi due fattori, perchè è evidente che per effettuare il prodotto $8\times 3\times 4$

(1) In generale:
$(a+b)\times(c+d)=a\times(c+d)+b\times(c+d)=a\times c+a\times d+b\times c+b\times d.$

(2) In generale
$$(a-b)\times c=a\times c-b\times c.$$

si dovrà moltiplicare l' 8 per 3 e il resultato per 4; ora, essendo $8 \times 3 = 3 \times 8$, il prodotto stesso potrà anche effettuarsi moltiplicando il 3 per 8 ed il resultato per 4. — Dunque in un prodotto di tre fattori si possono invertire *i due primi*, e così il terzo è uguale al primo.

Ragionando sul terzo prodotto come si è fatto sul primo per ottenere il secondo, si trova il quarto. — Dunque anche il quarto prodotto è uguale al primo.

Finalmente, cangiando nel quarto prodotto l' ordine dei due primi fattori, si ottiene il quinto, dal quale si deduce il sesto invertendo gli ultimi due fattori.

3.° *Caso di più fattori.*

Per dimostrare quest' ultima parte del teorema basterà provare che può invertirsi l' ordine di due fattori consecutivi qualunque, senza alterare il prodotto.

Sia dunque il prodotto $3 \times 5 \times 7 \times 2 \times 6$.

Supponiamo, per esempio, che vogliasi invertire l'ordine dei due fattori 5 e 7.

Pel caso precedente, si ha che:

$$3 \times 5 \times 7 = 3 \times 7 \times 5.$$

Se questi due prodotti uguali si moltiplicano per 2×6, i resultati saranno uguali, e per conseguenza:

$$3 \times 5 \times 7 \times 2 \times 6 = 3 \times 7 \times 5 \times 2 \times 6.$$

Dal che si vede che il fattore 7 è stato avanzato di un posto verso la sinistra; e ripetendo lo stesso ragionamento sopra i fattori 3 e 5, si avrebbe:

$$3 \times 5 \times 7 \times 2 \times 6 = 5 \times 3 \times 7 \times 2 \times 6.$$

Potendosi dunque invertire l' ordine di due fattori consecutivi qualunque, è chiaro che potranno scriversi tutti i fattori nell' ordine che si vuole adottare, senza che il valore del prodotto sia cangiato.

Dunque: *un prodotto qualunque non cambia invertendo i fattori.*

62. Teorema 4.° *Per moltiplicare un numero pel prodotto di molti fattori si può moltiplicare successivamente per ciascuno di questi fattori.*

Debbasi infatti moltiplicare 7 per 24.

Si avrà: $7 \times 24 = 24 \times 7$; e facendo $24 = 8 \times 3$, avremo: $7 \times 24 = 8 \times 3 \times 7$.

Ma $8 \times 3 \times 7 = 7 \times 3 \times 8 = 7 \times 8 \times 3$ (Vedi n° 61). — Dunque : $7 \times 24 = (7 \times 3) \times 8 = (7 \times 8) \times 3$, cioè 21×8 ovvero 56×3. Il che era da dimostrare.

Il teorema è sempre vero quando il prodotto è composto di molti fattori.

Così per moltiplicare il 7 per 48, poichè $48 = 2 \times 3 \times 2 \times 4$, basterà moltiplicare il 7 prima per 2, il resultato per 3, il nuovo resultato per 2 e finalmente il nuovo prodotto per 4.

63. Teorema 5.° *Per moltiplicare un prodotto per un numero basterà moltiplicare uno dei fattori per questo numero.*

Debbasi moltiplicare 30, che vale $2 \times 3 \times 5$, per 4; bisogna provare che è sufficiente moltiplicare il fattore 2, o il 3, o il 5 per 4.

Si ha : $30 \times 4 = 2 \times 3 \times 5 \times 4 = (2 \times 4) \times 3 \times 5$; dal che si vede che per moltiplicare il prodotto dei tre fattori per 4 è stato sufficiente moltiplicare uno dei fattori per 4.

64. Corollario 1° (1). *Per moltiplicare un prodotto per un altro prodotto si può formare un prodotto unico coi fattori del moltiplicando e con quelli del moltiplicatore.*

Debbasi moltiplicare $3 \times 2 \times 5$ per $4 \times 7 \times 8$. — Per moltiplicare un numero pel prodotto $4 \times 7 \times 8$, basta (vedi n.° 62) moltiplicarlo successivamente per ciascuno di questi fattori.

Si ha dunque :

$$(3 \times 2 \times 5) \times (4 \times 7 \times 8) = (3 \times 2 \times 5) \times 4 \times 7 \times 8.$$

Ora, la parentesi nel secondo membro non cambiando in nulla le operazioni indicate, si può sopprimere, e scrivere :

$$(3 \times 2 \times 5) \times (4 \times 7 \times 8) = 3 \times 2 \times 5 \times 4 \times 7 \times 8,$$

come era da dimostrare.

Corollario 2.° *Per moltiplicare due potenze di uno stesso numero, basta sommare gli esponenti.*

Debbasi moltiplicare 4^2 per 4^3; io dico che il prodotto sarà $4^{2+3} = 4^5$.

Infatti, $4^2 = 4 \times 4$; e $4^3 = 4 \times 4 \times 4$; quindi: $4^2 \times 4^3 = (4 \times 4) \times (4 \times 4 \times 4)$; ovvero: $4 \times 4 \times 4 \times 4 \times 4 = 4^5$ (2)

(1) *Corollario* è una conseguenza che deriva da una o più proposizioni dimostrate.

(2) In generale $a^m \times a^n = a^{m+n}$.

Corollario 3.° *Per moltiplicare due numeri terminati da zeri, si sopprimono questi zeri, si fa poi la moltiplicazione, e a destra del prodotto si scrivono tanti zeri quanti ne contengono i due fattori.*

Debbasi calcolare il prodotto 48000 per 5200.

Osservo che $48000 = 48 \times 10^3$; e $5200 = 52 \times 10^2$.

Quindi: $48000 \times 5200 = (48 \times 10^3) \times (52 \times 10^2) = 48 \times 10^3 \times 52 \times 10^2 = 48 \times 52 \times 10^3 \times 10^2 = 48 \times 52 \times 10^5$.

Ora, $10^5 = 100000$; dunque per ottenere il prodotto richiesto basta moltiplicare 48 per 52, e aggiungere 5 zeri al resultato (vedi n.° 48–4.°).

ESERCIZI

Sulla Moltiplicazione dei numeri interi.

XVI. Effettuare le seguenti moltiplicazioni:

(8×7); (10×5); (14×9); (24×7); (30×4);
(4×100); (8×10); (7×1000); (42×10); (18×100);
(73×10000); (937×2); (359×3); (70826×4):
(43958×7); (5369×4003); (14076×803);
(1000×100); (340×720); (64300×4000):

XVII. $(8 \times 12 \times 4)$; $(17 \times 5 \times 9\ 10)$;

$(120 \times 35 \times 48 \times 2)$; $(70 \times 10 \times 35 \times 490)$;

XVIII. Calcolare le seguenti potenze:

2^2. 3^3. 4^3. 5^2. 7^4. 8^3. 9^5. 10^7. 20^2.

35^3. 83^2. 17^5. 204^3. 1000^5.

XIX. Verificare le seguenti uguaglianze:

$$(8 + 7 + 4) \times (3 + 5 + 2) = 6720.$$
$$(204 - 37) \times 8 = 1336.$$
$$(12 + 108 + 4) \times (703 - 15) = 85312.$$
$$5^4 \times 5^3 = 78125. \quad (4^3 + 7^2) \times (3^2 + 2^4) = 2825.$$
$$(10^4 + 10^3 + 10^2) \times (10^5 - 10^3) = 1098900000.$$
$$(108 + 120)^2 \times (320 + 12)^3 = 1902321626112.$$

PROBLEMI

49. Una divisione militare è composta di 2 brigate: una brigata di 4 reggimenti: un reggimento, di 4 battaglioni: un battaglione di 4 compagnie e una compagnia di 120 uomini. — Si domanda quanti uomini contiene una divisione.

Soluzione. — Per risolvere il problema osserveremo che un battaglione essendo composto di 4 compagnie, e ogni compagnia essendo formata di 120 uomini, si avrà il numero degli uomini di un battaglione ripetendo 4 volte il 120; cioè si avrà 120 × 4 = 480 uomini. — Ora, poichè un reggimento si compone di 4 battaglioni, per sapere quanti uomini contiene un reggimento, si dovrà ripetere 4 volte il numero degli uomini di un battaglione, cioè 480, ed avremo: 480 × 4 = 1920. — Ed essendo una brigata composta di 4 reggimenti, si avrà il numero degli uomini di una brigata, ripetendo 4 volte il numero degli uomini di un reggimento, cioè 1920; e si ha 1920 × 4 = 7680. — Finalmente, una divisione essendo formata di 2 brigate, otterremo il numero degli uomini di una divisione, raddoppiando il numero degli uomini di una brigata, cioè 7680; ed avremo in tutto 7680 × 2 = 15360 uomini.

Operazione.

$$120 \times 4 = 480;\ 480 \times 4 = 1920;$$
$$1920 \times 4 = 7680;\ 7680 \times 2 = 15360.$$

Dunque una divisione militare si compone di 15360 uomini.

Il problema potrebbe risolversi anche nel modo seguente:

1 Battaglione = 4 compagnie;

1 Reggimento = 4 battaglioni = 4 × 4 = 16 compagnie;

1 Brigata = 4 reggimenti = 16 × 4 = 64 compagnie;

1 Divisione = 2 brigate = 64 × 2 = 128 compagnie;

1 Compagnia = 120 uomini; 128 compagnie = 128 × 120 = 15360 uomini.

50. Un battello fa 5 viaggi al giorno, e trasporta ogni volta 243 persone. Qual è il numero delle persone trasportate in un giorno?

R. — Il numero cercato è 1215.

51. Un mercante ha ricevuto 35 balle di mercanzia, che gli costano ognuna Lire 109. — Si domanda quanto spenderà.

R. — Lire 3815.

52. Un servitore ha lasciato nelle mani dei suoi padroni i salari di 18 anni. — Si chiede a quanto ascendono i suoi risparmi, essendo il suo salario di Lire 250 all' anno.

R. — Risparmi : lire 4500.

53. L' assedio d' una città è durato 21 giorni ; durante questo tempo gli assedianti hanno lanciato 545 bombe al giorno. — Qual è il numero delle bombe lanciate durante l'assedio ?

R. — N. 1445 bombe.

54. L' anno comune è composto di 365 giorni. — Si domanda quanti giorni ha vissuto un fanciullo, che muore all' età di 6 anni.

R. — Giorni 2190.

55. Una vettura fa 365 metri di strada ogni minuto : qual cammino avrà fatto in un' ora e 47 minuti?

R. — Metri 39055.

56. Un generele ha fatto distribuire 45 cartucce a ciascunn dei suoi soldati. Si sa che la sua armata è composta di 3 battaglioni, di 540 uomini ciascuno Quante cartucce ha egli distribuito?

R. — Ha distribuito 72900 cartucce.

57. Si contano 60 minuti in un' ora, 60 secondi in nn minuto. — Si domanda quanti secondi sono contenuti in 42 minuti, e quanti minuti in 56 ore.

In 56 ore vi sono 3360 minuti.

R — In 42 minuti vi sono 2520 secondi.

58. La città di Tebe aveva 100 porte ; per ciascuna di esse, in tempo di guerra, uscivann 2000 combattenti e 200 carri. — Qual è il numero dei guerrieri e dei carri che uscivano da questa città?

R. — Combattenti 200000. — Carri 20000

59. Essendo il raggio della Terra 6377 Chilometri, si domanda : la distanza dalla Terra alla Luna, che è di 60 raggi terrestri ; il raggio del Sole, che è 112 volte quello della Terra ; la distanza della Terra al Sole, che è di 24068 raggi terrestri.

R. — La distanza della Terra alla Luna è di Chilom. 382620 ; il raggio del Sole è di Chilom. 714224 ; la distanza della Terra al Sole è di Chilometri 153481636.

60. In Francia ci sono circa 5979311 Ettare coltivate a frumento e ogni Ettara ne produce in media 13 Ettolitri. — Si domanda : quanti Ettolitri di frumento si hanno in tutto ; qual somma se ne ricaverebbe a lire 23 l' Ettolitro.

R. — In tutto : Ettolitri 77731043 ; se ne ricaverebbero Lire 1787813989.

DIVISIONE DEI NUMERI INTERI.

65. La *Divisione* può definirsi: una operazione che ha per oggetto, dato il prodotto di due fattori ed uno di questi fattori, di trovare l'altro fattore. — Oppure: una operazione la quale ha per oggetto di cercare quante volte un numero, chiamato *dividendo*, contiene un altro numero, detto *divisore*. — Il resultato di questa operazione dicesi *quoziente*.

Per indicare la divisione di due numeri scrivesi il dividendo e quindi il divisore, separandoli con due punti (:); oppure scrivesi il dividendo e sotto ad esso il divisore, separandoli con una lineetta orizzontale (—); ambedue questi segni si leggono: *diviso per*. — Così $8 : 2$ e $\frac{8}{2}$ significano 8 *diviso per* 2.

La divisione è l'operazione inversa della moltiplicazione, come la sottrazione è l'inversa dell'addizione.

Infatti, nella moltiplicazione, dati due fattori, se ne cerca il prodotto; nella divisione, dato il prodotto dei due fattori ed uno di questi fattori, si cerca l'altro fattore.

Diversi casi della Divisione.

66. Nella divisione distingueremo quattro casi, cioè:

1.° *Il dividendo di una oppure di due cifre, il divisore e il quoziente di una cifra.*

2.° *Il dividendo composto e il divisore di una cifra.*

3.° *Il dividendo e il divisore composti, ma il quoziente di una cifra.*

4.° *Il dividendo e il divisore qualunque e il quoziente qualunque.*

67. Primo caso. — Sia da dividere 42 per 7.

Il quoziente si può ottenere in tre modi.

1.° *Mediante l'addizione.* — Aggiungendo 7 a sè stesso, si ha:

$$7 + 7 + 7 + 7 + 7 + 7 = 42;$$

il 42 contiene dunque *sei volte* il 7, e il quoziente che si cerca è per conseguenza 6.

2.° *Mediante la sottrazione.* — Togliendo 7 da 42 quante volte si può, si vede che esso vi è contenuto *sei volte.* Infatti:

$$42 - 7 = 35;\ 35 - 7 = 28;\ 28 - 7 = 21;\ 21 - 7 = 14;\ 14 - 7 = 7;\ 7 - 7 = 0.$$

3.° *Mediante la moltiplicazione.* — Moltiplicando successivamente il 7 pei numeri 1, 2, 3, 4, 5, ec., si ha: $7 \times 1 = 7$; $7 \times 2 = 14$; $7 \times 3 = 21$; $7 \times 4 = 28$; $7 \times 5 = 35$; $7 \times 6 = 42$. Il quoziente è 6, perchè *sei* sono le moltiplicazioni fatte.

In pratica, il quoziente della divisione di un numero di una o due cifre per un numero di una sola cifra, si trova per mezzo della *Tavola di Pitagora* (vedi n.° 47). — Esempio: dovendo dividere 56 per 7, cercasi nella linea verticale del 7 il 56, e si vede che il primo numero a sinistra della linea orizzontale, ove trovasi il 56. è 8, che è il quoziente cercato; infatti $7 \times 8 = 56$.

Abbiamo veduto che il prodotto di due numeri potrebbesi ottenere per mezzo dell'addizione, come il quoziente di due numeri per mezzo della sottrazione; perciò possiamo dire che, in ultima analisi, due sono le operazioni fondamentali dell'Aritmetica, cioè l'addizione e la sottrazione, giacchè la moltiplicazione e la divisione non sono che abbreviazioni delle medesime.

68. Non sempre il divisore è contenuto esattamente nel dividendo; in questo caso il quoziente è compreso fra due numeri interi consecutivi. — Così il quoziente di 57 per 7 è compreso fra 8 e 9; ossia è uguale a 8 più un *resto* 1, perchè $57 = 7 \times 8 + 1$.

69. Si osservi che il resto di una divisione deve esser sempre *più piccolo* del divisore: perchè se ciò non fosse, dividendolo per questo divisore, si otterrebbe *almeno* una nuova unità da aggiungere al quoziente.

70. Nel fare una divisione si ha in mira di determinare il più gran numero di volte che il divisore è contenuto nel dividendo. Per avere il resto è chiaro che bisognerà togliere dal dividendo il divisore quante volte si potrà: o, in altri termini, bisognerà togliere dal dividendo il prodotto del divisore pel quoziente.

Quindi, rappresentando con D il dividendo, con d il divisore, con q il quoziente, e con r il resto, si avrà sempre l'uguaglianza:

$$D - d \times q = r.$$

Aggiungendo ai due membri di questa uguaglianza una stessa quantità ($d \times q$), l'uguaglianza non resterà alterata (1), e si avrà:

$$D - d \times q + d \times q = d \times q + r.$$

Ma nel primo membro le quantità ($- d \times q$) e ($+ d \times q$) si distruggono l' una l' altra; quindi resterà:

$$D = d \times q + r.$$

Questa espressione, tradotta in linguaggio ordinario, dice: in qualunque divisione *il dividendo è uguale al divisore moltiplicato pel quoziente, più il resto*, se la divisione non si fa esattamente.

Così, se 43 è il dividendo, 7 il divisore, 6 il quoziente e 1 il resto, si ha l'uguaglianza:

$$43 = 7 \times 6 + 1.$$

71. Ciò posto, possiamo dimostrare gli altri casi della divisione.

Secondo caso. — Si debba dividere 5761 per 7.

Potremo subito sapere quante cifre avrà il quoziente. — A tale oggetto osserveremo che moltiplicando il divisore 7 pel quoziente che si cerca, *il prodotto non deve superare il dividendo* (vedi n.° 70). Quindi, se si moltiplica il 7 pei numeri 10, 100, 1000 ec., si hanno le uguaglianze: $7 \times 10 = 70$; $7 \times 100 = 700$; $7 \times 1000 = 7000$; dalle quali si vede che il quoziente incognito non potrà avere che sole tre cifre, perchè 7 moltiplicato per 1000, che è il più piccolo dei numeri di quattro cifre, dà un prodotto maggiore del dividendo 5761.

Ora, il quoziente dovendo avere tre cifre, si comporrà di unità, diecine, e centinaia. — Cominceremo dal determinare la cifra delle più alte unità, cioè delle centinaia; e a tal effetto si osserverà che *centinaia* moltiplicate per *unità*, come 7, producono sempre centinaia (n.° 55.): per conseguenza le centinaia del quoziente sa—

(1) E ciò per l' Assioma che *aggiungendo o togliendo quantità uguali da quantità uguali, i resultati son sempre uguali.*

ranno contenute in prodotto nelle 57 centinaia del dividendo, che separeremo con un punto dalle diecine ed unità.

L' operazione è così ridotta a dividere 57 per 7; e operando come nel primo caso, avremo 8 *centinaia* per quoziente e 1 centinaio di resto.

Alla destra di questo resto scriveremo la cifra 6 del dividendo, e si avranno così 16 diecine, che, divise per 7, dànno di quoziente 2 *diecine*, e per resto 2 diecine.

Restano a trovarsi le unità. — Scriveremo alla destra del resto 2 la cifra 1 delle unità del dividendo, e si avranno 21 unità, che, divise per 7, dànno di quoziente esatto 3 *unità*.

Si conchiude adunque che il quoziente della divisione di 5761 per 7, è 8 centinaia, più 2 diecine, più 3 unità, cioè 823; talmentechè

$$5761 = 7 \times 823.$$

72. In pratica l' operazione si dispone così:

Operazione

Dividendo	5761	7	Divisore
Diecine	16	823	Quoziente
Unità	21		
Resto	0		

e si dice: il 7 nel 57 entra 8 volte e avanza 1; scrivo l'8 sotto al divisore e l' 1 sotto le 7 centinaia del dividendo; alla destra del resto 1 scrivo la cifra 6 ed ho 16, e dico: il 7 nel 16 entra 2 volte e avanza 2; scrivo il quoziente 2 accanto all'8 sotto il divisore, e il 2 di resto sotto il 6, a destra del quale scrivo l' 1, ed ho 21; il 7 nel 21 entra 3 volte esattamente; pongo il 3 sotto il divisore alla destra delle due cifre già trovate, ed ho di quoziente 823.

Questa operazione può rendersi più spedita trascurando di scrivere i resti successivi.

Così diremo: il 7 nel 57, 8 volte e avanza 1; si scrive 8 in quoziente, e l' 1 si unisce mentalmente al 6 dicendo: il 7 nel 16, 2 volte e avanza 2; si scrive 2 in quoziente e il resto si unisce all' 1, dicendo: il 7 nel 21, 3 volte ecc.

73. terzo caso. — Proponiamoci di dividere 2876 per 792. Io dico che il quoziente sarà un numero semplice.

Infatti, il più piccolo numero di due cifre è 10. Ma (nº 70) il divisore moltiplicato pel quoziente non deve dare un pro-

dotto maggiore del dividendo, e ammettendo che il quoziente fosse 10, si avrebbe $792 \times 10 = 7920$, che è più grande del dividendo 2876.

Il quoziente dunque è più piccolo di 10, cioè semplice, e sarà per conseguenza uno dei numeri 1, 2, 3, 4.... 9.

Si proverà successivamente ciascuna di queste cifre, avvertendo che, moltiplicando il divisore pel quoziente e sottraendo il prodotto dal dividendo, il resto dev'essere *minore* del divisore (n° 69), altrimenti il quoziente è troppo piccolo.

Facendo dunque le dette prove, si ha:

$2876 - 792 \times 1 = 2876 - 792 = 2084$, resto maggiore del divisore;
$2876 - 792 \times 2 = 2876 - 1584 = 1292$ ....
$2876 - 792 \times 3 = 2876 - 2376 = 500$, resto minore del divisore.

Dunque 3 è il quoziente e 500 il resto.

In guisa che: $2876 = 792 \times 3 + 500$.

74. In pratica l'operazione si dispone come nel caso precedente e si dice:

OPERAZIONE

```
       2876 | 792
       2376 ‾‾‾‾3  Quoziente
Resto   500
```

il 7 nel 28 vi è contenuto 4 volte; ma $792 \times 4 = 3168$, è più grande di 2876; quindi il quoziente sarà 3, perchè moltiplicando 792 per 3 si ha 2376, che, sottratto da 2876, dà un resto 500 minore del divisore.

75. QUARTO CASO. — Debbasi dividere 43745 per 321. (Vedi l'operazione dopo il N.° 76). Potremo subito sapere quante cifre avrà il quoziente.

Infatti, supponiamo che ne abbia *due*; il più piccolo numero di due cifre è 10, e $321 \times 10 = 3210$, è più piccolo del dividendo 43745; dunque due cifre il quoziente può averle. — Vediamo se ne può aver *tre*; in quest'ipotesi si ha $321 \times 100 = 32100$, che è sempre più piccolo del dividendo; dunque il quoziente può aver tre cifre; e non potrà averne quattro, perchè $321 \times 1000 = 321000$ è più grande del dividendo 43745.

Dovendo il quoziente avere tre cifre, si comporrà di centinaia, diecine e unità. Cerchiamo la cifra delle centinaia; e poichè un numero qualunque, come 321, moltiplicato per continaia, produce centinaia (n.° 55), la cifra delle centinaia del quoziente la otterremo dividendo per 321 le centinaia del dividendo, che sono 437, separate con un punto le diecine e le unità. — Si tratta dunque di dividere 437 per 321, e così siamo ricondotti al caso in cui il quoziente ha una sola cifra, la quale sarà 1, che rappresenta *centinaia*, più il resto 116. — Alla destra di questo resto porremo la cifra 4 delle diecine del dividendo, e avremo 1164 diecine, che, divise per 321, daranno la cifra delle *diecine* del quoziente, che è 3, col resto 201. — Alla destra di 201 scriveremo la cifra 5 delle unità del dividendo, e si avranno così 2015 unità, le quali, divise per 321, danno 6 per la cifra delle *unità* del quoziente, più il resto 89. — Così l'operazione è finita, e si ha l'uguaglianza:

$$43745 = 321 \times 136 + 89.$$

76. Siamo ora in grado di enunciare la regola generale seguente:

Per dividere un numero per un altro, si scrive il divisore alla destra del dividendo, separando questi due numeri per mezzo d'una linea verticale, e facendo un'altra linea orizzontale sotto il divisore per segnare il posto del quoziente. — Ciò fatto, si cerca quante cifre avrà il quoziente, separando con un punto in alto sulla sinistra del dividendo tante cifre, che bastino a formare un numero che contenga almeno una volta il divisore; allora il numero delle cifre che restano alla destra del dividendo, più uno, indica quante cifre avrà il quoziente. — Per determinare poi ogni cifra del quoziente, si opera così: si comincia dalla sinistra *a cercare quante volte il primo dividendo parziale contiene il divisore: la cifra che si ottiene è la prima cifra del quoziente totale, che si scrive nel primo posto a sinistra sotto il divisore, perchè è la cifra delle più alte unità. — Si moltiplica il divisore per la cifra ottenuta, e il prodotto si sottrae dal primo dividendo parziale. — Alla destra del resto si abbassa la cifra seguente del dividendo totale, e si forma così il secondo dividendo parziale, sul quale si opera come sul precedente, vale a dire si cerca quante volte esso contiene il divisore, ciò che dà la se-*

conda cifra del quoziente; si moltiplica il divisore per questa cifra, e si sottrae il prodotto dal secondo dividendo parziale. — Abbassando alla destra del resto la cifra seguente del dividendo totale, si ottiene il terzo dividendo parziale. Su questo si fa la stessa serie d'operazioni, sino a che tutte le cifre alla destra del punto sieno abbassate.

Esempio: debbasi dividere 43745 per 321.

Operazione

Dividendo	43745	321 Divisore	
	321	136 Quoziente	
2.° Dividendo parziale	1164	Prova	
	963	321 × 136	
3.° Dividendo parziale	2015	1926	
	1926	963	
Resto	89	321	
		Resto 89	
		43745	

Spiegazione

Scritto il divisore alla destra del dividendo, per sapere quante cifre avrà il quoziente, prendo sulla sinistra del dividendo tante cifre quante sono necessarie a formare un numero che contenga almeno una volta il divisore 321; le prime tre, 437, sono sufficienti; pongo un punto sopra il 7, e poichè restano ancora due cifre al dividendo totale, concludo che il quoziente avrà tre cifre. — Ora dico: il 321 in 437 quante volte vi è contenuto? — Una volta, perchè il 3 nel 4 entra una sola volta. Scrivo 1 sotto il divisore, moltiplico 321 per 1, e il prodotto 321 lo sottraggo dal primo dividendo parziale 437. Ho di resto 116, alla destra del quale abbasso la cifra seguente 4 del dividendo totale, e ottengo il numero 1164 per secondo dividendo parziale. E dico: il 321 nel 1164 quante volte vi entra? 8 volte, perchè il 3 nell' 11 vi sta 3 volte. Pongo il 3 alla destra della prima cifra trovata al quoziente: moltiplico 321 per 3, e il prodotto 963 lo sottraggo da 1164; il resto è 201. Abbasso la cifra 5 alla

destra di questo resto, ed ho il numero 2015 per terzo dividendo parziale. — Il 321 in 2015 vi è contenuto 6 volte, perchè il 3 nel 20 vi sta 6 volte. Scrivo il 6 in quoziente: moltiplico 321 per 6, e il prodotto 1926 lo sottraggo da 2015; il resto è 89. — Essendo abbassate tutte le cifre del dividendo totale, la operazione è finita, e il quoziente cercato è 136; in guisa che

$$43745 = 321 \times 136 + 89.$$

Osservazioni.

77. Quando si cerca quante volte un dividendo parziale contiene il divisore, la cifra che si trova non è sempre la vera cifra del quoziente: è dunque necessario di sapere in quali circostanze è stato commesso un errore; ciò si conoscerà facilmente per mezzo delle osservazioni seguenti:

1.ª *Una cifra posta al quoziente è troppo grande, quando la sottrazione non può effettuarsi* (vedi n.º 74) *e in questo caso bisogna diminuirla di una o più unità.*

2.ª *Una cifra posta al quoziente è* troppo piccola, *quando, dopo la sottrazione, il resto è superiore o eguale al divisore.* (vedi nº73).

3.ª *In ogni divisione parziale, una cifra del quoziente non può sorpassare* 9, perchè se si avesse, per esempio, 10, avremmo un' unità dell' ordine superiore, e la cifra trovata avanti sarebbe troppo piccola.

4.ª Può accadere che dopo avere abbassato una cifra a destra del resto, il dividendo parziale sià più piccolo del divisore; ciò indica che il quoziente non contiene cifra significativa dell'ordine che segue. In questo caso si pone uno zero al quoziente per tener luogo dell' ordine d' unità che manca, e si abbassa a destra un' altra cifra del dividendo totale per formare un nuovo dividendo parziale.

Metodo abbreviato.

78. L' operazione della divisione si può render più breve, effettuando contemporaneamente la moltiplicazione e la sottrazione. — Riprendiamo l' esempio precedente (vedi n.º 76).

Si tratta di dividere 43745 per 321.

Operazione		Spiegazione
43745	321	
1164	136	
2015		
89		

Si dirà: il 321 nel 437 ci sta una volta; si scrive l'1 in quoziente, e si moltiplica, dicendo: 1 via 1 fa 1, che sottratto da 7, resta 6, che scrivo sotto il 7; 1 via 2 fa 2, che sottratto da 3, resta 1, che pongo sotto il 3; 1 via 3 fa 3, che sottratto da 4, resta 1. — Si abbassa il 4 accanto al resto 116, e si ha 1164. — Il 321 nel 1164 ci sta 3 volte; si scrive 3 al quoziente alla destra dell'1, e si moltiplica, dicendo: 3 via 1 fa 3, che sottratto da 4, resta 1; 3 via 2 fa 6, che sottratto da 6, resta zero; 3 via 3 fa 9, che sottratto da 11, resta 2, ec.

Prova della Divisione.

79. Si fa la prova della divisione, moltiplicando il divisore pel quoziente, e aggiungendo al prodotto il resto, se vi è; il prodotto che ne resulta dev'essere uguale al dividendo. Ciò resulta dall'osservazione (vedi n.° 70) che in qualunque divisione il dividendo è uguale al prodotto del divisore pel quoziente, più il resto (vedi l'esempio al n.° 76).

Numero delle cifre del quoziente.

80. Abbiamo già visto (n.° 76) come si determina in ogni caso particolare il numero delle cifre del quoziente, ma vi è ancora una regola generale che è utile conoscere:

Il quoziente d'una divisione ha sempre tante cifre quante il dividendo ne ha di più del divisore, o quante ne ha di più del divisore più una.

Infatti, il numero delle cifre del quoziente è uguale a quello delle divisioni parziali. Ora il primo dividendo parziale ha tante cifre quante il divisore, oppure una di più. In quest'ultimo caso il numero delle divisioni parziali, e per conseguenza quello delle cifre del quoziente, è uguale all'eccesso del numero delle cifre del dividendo su quello del divisore. Nell'altro caso, vi sarà una divisione parziale di più, e per conseguenza una cifra di più al quoziente; quindi l'eccesso del numero delle cifre del dividendo su quello del divisore sarà aumentato di un' unità.

Natura del quoziente.

81. Quando il dividendo ed il divisore sono due numeri *concreti* ed *eterogenei*, il quoziente è sempre della stessa natura del dividendo.

Infatti, riguardando la divisione come operazione nella quale, dato il prodotto di due fattori ed uno di questi, si cerca l' altro fattore (n.° 65), e ricordando che nella moltiplicazione il prodotto è sempre della stessa natura del moltiplicando, è chiaro che se il dividendo ed il divisore sono *eterogenei*, il quoziente sarà della stessa natura del dividendo, perchè il prodotto deve essere della stessa natura d'uno dei suoi fattori.

Esempio: — Avendo *lire* 120 da dividersi fra 5 *persone*, per sapere quanto tocca a ciascuna, dovremo dividere 120 per 5 e il quoziente esprimerà *lire*, cioè sarà della stessa natura del dividendo.

Quando il dividendo e il divisore sono *omogenei*, la natura del quoziente non si può conoscere che dall'enunciato del problema che ha dato luogo alla divisione.

Esempio: — Sapendo che si sono divise *lire* 120 fra un certo numero di persone e che ciascuna ha avuto di sua parte *lire* 5, per conoscere il numero di queste persone dovremmo dividere 120 per 5, ed il quoziente esprimerebbe il numero delle persone richiesto.

TEOREMI

Relativi alla Divisione.

82. Teorema 1.° *Quando si moltiplica il dividendo e il divisore di una divisione per uno stesso numero, il quoziente non cambia, e il resto è moltiplicato per questo numero.*

Infatti, supponiamo che si renda il dividendo 2, 3, 4 ec. volte più grande senza alterare il divisore: il dividendo conterrà allora il divisore 2, 3, 4 ec. volte di più, e il quoziente diverrà 2, 3, 4 ec. volte più grande; ma se si moltiplica anche il divisore per 2, per 3, per 4, ec.,esso si rende 2,3, 4 ec. volte più grande, e per conseguenza è contenuto nel dividendo 2, 3, 4 ec. volte di meno; al-

lora il quoziente diventa 2, 3, 4 ec. volte più piccolo. Quindi, moltiplicando il dividendo per 4, si rende il quoziente 4 volte più grande; ma moltiplicando anche il divisore per 4 si rende il quoziente 4 volte più piccolo; vi è dunque compenso, e il quoziente, per conseguenza, non cambia.

Esempio. — Sieno i due numeri 116 e 12. Dividendoli l'uno per l'altro si ha l'uguaglinza:

$$116 = 12 \times 9 + 8.$$

Abbiamo provato che moltiplicando il dividendo 116 e il divisore 12 per un numero qualunque, per esempio per 4, il quoziente è sempre 9, ma rimane da dimostrare che il resto 8 diverrà 4 volte più grande.

A tale oggetto basta considerare l'uguaglianza precedente, la quale ci dice che 116 *unità* contengono 9 volte 12 *unità*, più un resto di 8 *unità*.

Ora la parola *unità*, non esprimendo niente di determinato, può essere sostituita da una *collezione di* 4 *oggetti*; per conseguenza: 116 collezioni di 4 oggetti ciascuna, conterranno 9 volte 12 di queste collezioni, più un resto di 8 collezioni; il che viene espresso dall'uguaglianza

$$(116 \times 4) = (12 \times 4) \times 9 + (8 \times 4),$$

la quale dimostra che il resto è moltiplicato per 4, come bisognava provare.

83. Al modo stesso si proverebbe che *se il dividendo e il divisore di una divisione si dividono per uno stesso numero, il quoziente non cambia, ma il resto è diviso per questo numero.*

Corollario 1.° Dal Teorema del n.° 82 resulta: 1.° che se si moltiplica o si divide il solo dividendo, il quoziente resta moltiplicato o diviso. — 2.° che se si moltiplica o si divide il divisore, il quoziente è diviso o moltiplicato.

Corollario 2.° Il Teorema del n.° 83 permette di semplicizzare in molti casi la divisione. — Infatti, se si vede che il dividendo e il divisore hanno un divisore comune, si dividono per questo divisore, si effettua quindi la divisione, e si moltiplica il resto per questo divisore.

Così, se si dovesse dividere 36000 per 1200, basterebbe sopprimere due zeri, cioè dividere per 100, da una parte e dall'altra, e la divisione sarebbe ridotta a quella di 360 per 12, la quale dà 30 per quoziente.

84. Teorema 2.° *Per dividere un prodotto per uno dei suoi fattori, basta sopprimere questo fattore.*

Così, $8 \times 3 \times 2$ diviso per 3, darà per quoziente 8×2. — Infatti, il divisore 3, moltiplicato pel quoziente 8×2, riproduce il dividendo.

Corollario. *Per dividere un prodotto per un numero, basta dividere uno dei fattori per questo numero, purchè la divisione si faccia senza resto.*

Infatti, debbasi dividere il prodotto $8 \times 35 \times 6$, per 7. — Osservo che $35 = 7 \times 5$; quindi il prodotto $8 \times 35 \times 6$ può scriversi $8 \times 7 \times 5 \times 6$.

Ora per dividere un prodotto per 7, basta sopprimere il fattore 7; quindi il quoziente cercato è $8 \times 5 \times 6$. come bisognava dimostrare.

85. Teorema 3.° *Per dividere un numero pel prodotto di due o più fattori, basta dividerlo successivamente per ciascuno di questi fattori.*

Debbasi, infatti, dividere 195 per 15, che è uguale a 3×5. Il quoziente di 195, per 15, è 13; quindi si ha l'uguaglianza:

$$195 = 15 \times 13,$$

ovvero $$195 = 3 \times 5 \times 13.$$

Dividendo per 3 i due membri di questa uguaglianza, i quozienti saranno eguali, dunque

$$195 : 3 = 5 \times 13;$$

dividendo per 5, si ha

$$195 : 3 : 5 = 13;$$

ossia $$195 : 3 : 5 = 195 : (3 \times 5),$$

il che dimostra il teorema.

86. Teorema 4.° *Per dividere due potenze di uno stesso numero, basta sottrarre gli esponenti.*

Così $7^5 : 7^3 = 7^{5-3} = 7^2$.

Infatti, moltiplicando il divisore 7^5 pel quoziente 7^2, si riproduce il dividendo 7^5 (vedi n.° 79) (1).

ESERCIZI

Sulla Divisione dei numeri interi.

XX. Effettuare le seguenti divisioni:

(54 : 2) . (6325 : 5) . (1755 : 3) . (5368 : 4) . (40376 : 7) .
(31608 : 9) . (104040 : 8) . (151914 : 21) . (60605 : 85).
(41328 : 72) . (3784 : 18) . (4370 : 10) . (5181400 : 700) .
(3940000 : 1000) . (168000 : 7500) . (2175360 : 7040).
(498300765 : 7892).

XXI. Verificare le seguenti uguaglianze:

$$153481636 : 24068 = 6377.$$
$$8384678 = 542 \times 15469 + 480.$$
$$85643 - (37 \times 2314) = 25.$$
$$85643 = 37 \times 2314 + 25.$$
$$(8384678 \times 4) : (542 \times 4) = 15469 + (480 \times 4).$$
$$(16 \times 20 \times 3) : 5 = 16 \times 4 \times 3.$$
$$(20 \times 12 \times 80) : (8 \times 3 \times 16) = (5 \times 4 \times 5) : 2 = 5 \times 2 \times 5.$$
$$3600 : (2 \times 3 \times 4 \times 5) = 30.$$
$$\overline{18450}^4 : \overline{18450}^5 = 18450.$$

XXII. Prendasi un numero qualunque e si moltiplichi successivamente pei numeri 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9; poi dividasi l' ultimo prodotto trovato per 2, il quoziente per 3, il nuovo quoziente per 4 e così successivamente pei numeri 5, 6, 7, 8, 9. Tutte le divisioni dovranno farsi esattamente, e l' ultimo quoziente dovrà essere uguale al primo numero proposto.

(1) In generale: $A^{m+n} : A^n = A^m$; il che fa dire che *nella divisione gli esponenti si sottraggono*

Esempio

436	2
872	3
2616	4
10464	5
52320	6
313920	7
2197440	8
17579520	9
158215680	2
79107840	3
26369280	4
6592320	5
1318464	6
219744	7
31392	8
3924	9
436	

PROBLEMI

61. Una somma di Lire 50297 è stata divisa in parti uguali fra un certo numero di famiglie povere. — Domandasi il numero di queste famiglie, sapendo che la parte di ciascuna è stata di lire 689.

Soluzione. — È chiaro che se ogni famiglia ha ricevuto lire 689, moltiplicando il numero incognito delle famiglie per 689 dovrebbe riprodursi la somma di lire 50297. — In questo caso dunque è dato un prodotto di due fattori (50297) ed uno di questi fattori (689) e devesi trovare l' altro fattore.

Per risolvere dunque il problema bisognerà dividere 50297 per 689, e il quoziente indicherà il numero delle famiglie.

Operazione

50297	689
2067	73
000	

Il numero delle famiglie è dunque 73, — Infatti : 689 $\times$ 73 = 50297.

62. Qual è il numero che, moltiplicato per 307, dà di prodotto 75215?

R. — Il numero richiesto è 245.

63. Un orologio a pendolo ha fatto 1380 oscillazioni in 23 minuti. — Quante ne fa per minuto?

R. — Fa 60 oscillazioni.

64. Quante ore vi sono in 420 minuti, e quanti minuti in 540 secondi?

R. — In 420 minuti vi sono 7 ore.

In 540 secondi vi sono 9 minuti

65. Un tale ha pagato Lire 615 per 15 dozzine di fazzoletti, che ha rivenduti per L. 660. — Far conoscere quanto ha guadagnato per ogni dozzina.

R. — Ha guadagnato L. 3.

66. Un capo d'officina, che ha sotto di sè 18 lavoranti, paga ogni settimana lire 432 per loro salario. — Si dica quanto guadagna ogni lavorante per settimana e per giorno.

R. — Lire 24 per settimana, e lire 4 per giorno.

67. Un mercante di liquori vende ogni mattina ad un numero di artigiani 96 bicchierini d'acquavite: si sa che ogni artigiano ne prende due bicchierini. — Si chiede il numero degli artigiani.

R. — Artigiani 48.

68. Un battaglione fornisce 38 uomini ogni giorno pel servizio delle porte d'una città. Si domanda a quanti giorni d'intervallo deve ricominciare il turno d'ogni uomo, supponendo il battaglione composto di 798 uomini.

R. — Il turno comincia ogni 21 giorni.

69. La spesa d'una certa opera è valutata lire 147900. — Si vuol sapere in quanto tempo sarà terminata, supposto che s'impieghino regolarmente 170 artisti per giorno, al prezzo di lire 5.

R. — Sarà terminata in giorni 174.

70. Un maniscalco ha ferrato i cavalli d'un reggimento, e chiede d'esser pagato; ma ha dimenticato di contare i cavalli. Sa però che ha posto 32 chiodi ad ogni cavallo e che ha impiegato in tutto 13056 chiodi. — Trovare il numero dei cavalli del reggimento.

R — I cavalli erano 408.

71. Un uomo morendo lascia lire 8844; egli dà la metà di questa somma a sua sorella, e divide l'altra metà fra i suoi tre nipoti: quanto riceverà ogni erede?

R. — La sorella avrà lire 4422.

I nipoti lire 1474 ciascuno.

72. Tre persone si dividono un'eredità; la prima deve avere la metà di lire 32478; la seconda il terzo del resto e la terza gli altri due terzi. — Si domanda qual'è la parte di ciascuna.

R. — La parte della prima è lire 16239; della seconda, lire 5413; della terza lire 10826.

73. La circonferenza della Terra contiene circa 40000000 di metri. — Si domanda la lunghezza d'un grado, d'un minuto e d'un secondo di questa circonferenza; sapendo che la circonferenza d'un circolo contiene 360 gradi, il grado 60 minuti e il minuto 60 secondi.

R. — La lunghezza d'un grado è circa 111111 metri; d'un minuto 1851 metri circa; d'un secondo 30 metri circa.

74. Un tale aveva lire 247827; nel 1860 egli pagò il terzo di questa somma ai suoi creditori. Un anno dopo, egli eredita da suo fratello L. 30407, e da sua sorella L 78000, colla condizione di dare ai poveri una somma di L. 7894. Questo tale venuto a morte vuole che il suo patrimonio si divida in parti uguali fra i suoi tre figli. — Trovare la parte di ciascuno.

R. — La parte di ciascuno è lire 88577

ESERCIZI

Di recapitolazione sulle prime quattro operazioni dei numeri interi.

XXIII. Calcolare le seguenti espressioni:

$$16 + 24 - 8. \quad 32 - 10 + 12. \quad (40 \times 3) + 13.$$
$$(180 + 7) - (5 \times 4). \quad 8 \times (3 + 2 + 5\ (*). \quad (6 + 7 + 3) \times 5.$$
$$4 \times (8 - 3). \quad 16 \times (5 - 3). \quad 4 \times 3 \times 2 \times 5 \times 8.$$
$$(18 \times 14) : 8. \quad (3 + 4 - 7) \times 5. \quad 8 \times (4 + 6 - 2).$$
$$(150 + 45 - 38 + 12) \times 4. \quad (180 \times 37) : (15 \times 13).$$
$$13 \times (8 + 4 - 3). \ (4 + 3 + 2)^2. \quad 8^2 \times 8^3. \quad 16^5 : 16^2.$$
$$(78 - 16)^3. \quad (180 \times 100)^2.$$

XXIV. Verificare le uguaglianze:

$$482^2 + 773^2 = 382^2 + 827^2 = 257 \times 3229 = 829853.$$
$$432^2 + 541^2 = 586^2 + 371^2 = 37 \times 13001 = 481037.$$
$$1366^2 + 731^2 = 1546^2 + 101^2 = 53 \times 45289 = 2400317.$$

PROBLEMI

75. Si domanda qual' è quella quantità di Lire che, sommata con Lire 428, dà lire 1600.

R. — Lire 1172.

76. Si domanda per qual numero si debba moltiplicare 820 per avere un prodotto di 303400.

R. — Il numero cercato è 370.

(*) Quando due o più numeri si trovano fra parentesi, si deve intendere che l' operazione indicata dal segno, posto avanti o dopo la parentesi, deve eseguirsi sopra tutti i numeri in essa contenuti.
In questo esempio si ha:

$$8 \times (3 + 2 + 5) = 8 \times 3 + 8 \times 2 + 8 \times 5$$
$$= 24 + 16 + 40 = 80.$$

77. Un tale ha un debito di Lire 8000 e fa un pagamento di 30 pezzi da 5 Lire, e di 10 pezzi da Lire 20. — Si domanda quanto debba ancora.

R. — Deve Lire 7650.

78. Una città assediata ha ancora 61845 razioni; essa ne consuma 4123 per giorno; quanto tempo potrà sostenere l' assedio?

R. — Giorni 15.

79. La popolazine della Francia è di 33540910 abitanti; quella dell' Inghilterra è di 15907000; qual' è la differenza fra la popolazione di questi due paesi?

R. — Differenza: 17633910 abitanti.

80. Ogni giro che fa la piccola lancetta sul quadrante d' un orologio, indica che sono trascorse 12 ore; quanti minuti sono trascorsi quando la stessa lancetta ha fatto 9 volte il giro del quadrante?

R. — Minuti 6480.

81. Un possidente ha Lire 6570 di rendita all'anno. — Si vuol sapere ciò che puo spendere al giorno, calcolando l' anno di 365 giorni.

R. — Lire 18.

82. Si sa che l' Europa conta circa 210000000 d' abitanti; l' Asia 500000000; l' Africa 70000000; l' America 33000000, e l' Oceania 20000000. — Si domanda qual' è la popolazione della terra.

R. — Abitanti 833000000.

83. L' Hymalaya nell' Asia, la più alta montagna del Globo, ha 7821 metri d' altezza; il monte Bianco, il più alto d' Europa, ha 4810 metri. — Di quanto l' Hymalaya sorpassa il monte Bianco?

R. — Di metri 3011.

84. L'effettivo d' un battaglione era di 632 uomini; di questi sono morti 35 all' ospedale, 3 hanno disertato, e 87 hanno ottenuto il congedo. — Quanti uomini restano?

R. — Restano 507 uomini.

85. Una persona ha 21 gettoni nella mano destra: se si aggiunge 34 a questo numero e si divide il tutto per 5, si avrà il numero dei gettoni della mano sinistra. — Trovare questo numero.

R. — Il numero richiesto è 11.

86. Si impiegano 156 lavoranti, di cui 87 sono pagati a ragione di Lire 2 per giorno, 45 a ragione di Lire 3 e gli altri a ragione di Lire 4. — Qual' è la somma giornaliera occorrente?

R. — Lire 405.

87. Un banchiere aveva in cassa Lire 47429. Esso ha fatto tre pagamenti: l' uno di Lire 1257; l'altro di Lire 6530, e il terzo di Lire 4219. — Quanto è rimasto in cassa?

R. — Lire 35423.

88. Un calzolaio ha tolto 15 paia di scarpe da un pezzo di cuoio; in questo me-

desimo pezzo ve ne riescono ancora altre 6 paia; quanto gli costano il paio le scarpe, sapendo che nel cuoio ha speso Lire 84?

R. — Lire 4 il paio.

89. Si vuole scavare un pozzo di 8 metri di profondità, a ragione di Lire 5 pel primo metro, di Lire 6 pel secondo, e così di seguito, aumentando il prezzo di Lire 1 per metro. — Quale sarà la spesa totale?

R. — Lire. 68.

90. Una fontana fornisce 30 litri d'acqua ogni ora; un' altra fontana ne fornisce 45; una terza, 80. — Qual' è la quantità d'acqua versata dalle 3 fontane in 24 ore?

R. — Litri 3720.

91. S'impiegano in un certo lavoro 3 uomini a ragione di Lire 4 per giorno. Volendo sostituire ad essi 5 donne e 2 fanciulli, pagando ad ognuna delle donne Lire 2 per giorno, quanto bisogna dare ai fanciulli per fare la stessa spesa?

R. — Lire 1 per fanciullo.

92. Un fornaio deve fornire il pane necessario ad un reggimento per 94 giorni; il reggimento è composto di 1500 uomini, e la razione giornaliera è di 6 chilogrammi di pane per ogni 8 uomini. — Il fornaio domanda quanti pani di 3 chilogrammi ciascuno dovrà fare in tutta la fornitura.

R. — Pani 35250.

93. Un' armata è composta di 3 Divisioni: la prima ha 16 pezzi di cannone, 12000 pedoni e 3000 cavalli; la seconda ha 25 pezzi di cannone, 15000 pedoni e 2500 cavalli; la terza ha 32 pezzi di cannone, 4500 cavalli e 22500 pedoni. — Si vogliono conoscere le forze riunite di quest' armata, in uomini, in cavalli, ed in cannoni.

R. — Uomini 49500. — Cavalli 10000. — Cannoni 73

94. Cinque persone hanno in tutte 140 anni. La prima, o la più giovane, non ha che la metà degli anni della seconda, la quale ha 8 anni, la terza ha quattro volte l' età della seconda, la quarta ha la metà dell' età della terza, e la quinta ha 5 volte l' età della quarta. Qual' è l' età di ciascuna persona?

R. — Della prima anni 4, della seconda 8, della terza 32, della quarta 16, della quinta 80.

95. Edoardo ha cominciato il suo commercio con L. 20000. Alla fine dell' anno trova che il suo attivo si compone: primo, di lire 18000 di mercanzie; secondo, di lire 5000 in denaro; terzo, di lire 6000 di biglietti; quarto, di L. 8020 di crediti. — Il suo passivo si compone: primo, di L. 2290 di cambiali; secondo di lire 4730 di debiti — Si formi il suo inventario, e ciò che ha guadagnato ricorderà il numero di Greci che, sotto la condotta di Senofonte, operarono la più celebre ritirata che vanti l' istoria.

R. — Guadagno: Lire 10000.

96. Due amici sono stabiliti, l' uno a Parigi, l' altro a Costantinopoli. Essi convengono di partire nello stesso tempo, affine d' incontrarsi; il primo fa 10 leghe per giorno, ma alla fine di 23 giorni di cammino, è obbligato di fermarsi; l' altro,

che fa solo 8 leghe per giorno, raggiunge il suo amico alla fine di 46 giorni. — Qual' è la distanza da Parigi a Costantinopoli ?

R. — Leghe 598.

97. Due viaggiatori partono nello stesso tempo dai due punti più lontani della Scandinavia ; essendosi diretti l' uno verso l' altro, si sono incontrati dopo 20 giorni di cammino ; il primo fa 6 leghe per giorno, il secondo 17. — Qual' è la lunghezza della Scandinavia ?

R. — Leghe 460.

98. Un mercante ha 3 pezze di stoffa, che costano in tutto Lire 1108. La prima contiene 19 metri, e costa Lire 23 il metro ; la seconda contiene 25 metri, e costa lire 18 ; e la terza contiene 17 metri. — Qual è il prezzo di un metro della terza pezza, sapendo che esso è uguale al numero di giorni di cui l' anno greco ritarda sul nostro?

R. — Il numero richiesto è 13.

99. Due persone hanno comprato in tutto 546 metri di panno : il panno della prima persona costa Lire 5 il metro ; 5 metri del panno della seconda persona, che ne ha 455, costano quanto 3 metri di quello della prima. Esse hanno pagato in tutto tante Lire, quante leghe geografiche contiene l' Africa in tutta la sua lunghezza. — Trovare la somma pagata.

R — Lire 1820.

100. A e B misero in comune una somma ; qualche tempo dopo A, che pose meno di B, aggiunse Lire 530 al capitale della società, e B, al contrario, ne tolse Lire 245. — Sapendo che la differenza dei loro capitali è ora di Lire 1264, trovare la differenza dei capitali primitivi.

R. — Lire 1549.

101. Otto persone hanno formato una società, ponendo ciascuna L. 238764. Dopo 6 anni, per guadagni fatti, il capitale totale impiegato è divenuto 5 volte maggiore, comprese peró le spese di società, che ammontarono annualmente a L. 15679. — Si domanda : Quale fu la somma totale messa in società. — Che divenne essa dopo 6 anni, compresevi le spese. — Che divenne, escludendo le spese ?

R. — Somma totale impiegata : L. 1910112. — Dopo 6 anni, comprese le spese, divenne Lire 9550560. — Escluse le spese : Lire 9456486.

102. Due corrieri vanno incontro l' uno all' altro; il primo fa 5 Chilometri ogni ora, il secondo ne fa 3, e la distanza dai punti di partenza è di 120 Chilometri. — Si domanda quante ore dovranno camminare per incontrarsi, e quale sarà allora la lunghezza della strada percorsa da ciascuno di essi.

Soluzione — I due corrieri, facendo respettivamente 5 Chilometri e 3 Chilometri ogni ora, si avvicinano di 8 Chilometri in un' ora. Per conseguenza, quante volte 8 sarà contenuto in 120, che esprime in Chilometri la distanza dai punti di partenza, tante ore essi dovranno camminare avanti d' incon-

trarsi. Ora il quoziente di 120 per 8 è 15. Dunque essi s' incontreranno dopo 15 ore di strada, ed avranno allora percorso, il primo 5 $\times$ 15 $=$ 75 Chilometri, e il secondo, 3 $\times$ 15 $=$ 45 Chilometri.

103. Due mobili sono attualmente distanti 70686 metri e si muovono l'uno incontro all'altro; il primo percorre 10 metri e il secondo 8 metri per minuto — Si domanda dopo quanto tempo i due mobili s' incontreranno.

R — S' incontreranno dopo 65 ore e 27 minuti.

104. Trovare due numeri tali, che la loro somma sia uguale a 128, e che la loro differenza sia uguale a 34.

Soluzione. — Il maggiore dei due numeri richiesti essendo uguale al minore aumentato di 34, la loro somma 128 è uguale al minore più il minore più 34, ossia al doppio del minore più 34; dunque il resto 94, che si ottiene togliendo 34 da 128, è il doppio del minore dei due numeri richiesti; dunque esso è uguale alla metà di 94 o 47, e, per conseguenza, il numero maggiore domandato è uguale a 47 più 34 o 81. — Questi due numeri sodisfanno al problema; perchè si ha

$$81 + 47 = 128 \text{ e } 81 - 47 = 34.$$

105. Trovare due numeri tali, che la loro somma sia uguale a 1200, e che la loro differenza sia uguale a 120.

R. — Primo numero 540; secondo, 660.

106. Due mercanti pongono in commercio ciascuno una somma. Si sa che la somma posta dal primo aggiunta a quella posta dal secondo forma il totale di L. 56800, e che la differenza delle due somme è L. 1580. — Trovare la quantità di lire posta da ciascun mercante.

R. — Le somme poste in commercio sono lire 29190 e lire 27610.

107. Luigi diceva a suo fratello: potresti tu dirmi la somma che si otterrebbe ripetendo 300000 volte 73000000000 Lire? — E tu, gli rispose il fratello, mi diresti qual somma potrebbero contare cento milioni d' uomini in 10 anni, per 10 ore al giorno e contando ciascuno 100 lire ogni minuto? — Luigi trovò che questa era la somma che egli domandava.

R. — La somma cercata è lire 21,900000000000000.

108. Un tale acquista un cavallo per lire 360; dopo 45 giorni lo vende per Lire 412. — Quanto quadagnò, o quanto perdè, se gl' introiti che si procurò col mezzo di quel cavallo ammontano a lire 150, e se la spesa di mantenimento gli costò giornalmente lire 3?

R. — Guadagnò lire 67.

109. Parte da Firenze un convoglio sulla ferrovia, diretto a Pistoia, ed ha 580 viaggiatori. Alla prima stazione ne discendono 15, e ne salgono 37; alla seconda ne discendono 50, e ne salgono 32; alla terza ne discendono 31, e ne salgono 22; alla quarta ne discendono 25, e ne salgono 20; alla quinta ne discen-

dono 8, e ne salgono 26. — Quanti viaggiatori sono discesi in tutto? — Quanti ne sono saliti? — Il numero totale di quanto è stato accresciuto?

R. — Ne sono discesi 129 — Ne sono saliti 137. — Il numero totale è accresciuto di 8.

110. Un mercante comincia il suo traffico con una data somma. Dopo un certo tempo trova un guadagno di lire 1550, col quale compra tanto panno da lire 25 il metro, che poi vende con un guadagno complessivo di lire 248. Compra dipoi 8 pezze di velluto di 48 metri ciascuna, a lire 12 il metro, e lo vende, guadagnando Lire 35 per ogni pezza — Si vuol sapere: 1. Quanti metri di panno potè comprare colle lire 1550 — 2. Quanto guadagnò per ogni metro nel venderlo — 3. Quanto spese nella compra delle 8 pezze di velluto — 4. Qual somma ricavò dalla vendita di esso.

R. — Comprò Metri 62 — Guadagnò L. 4 per ogni metro — Spese L. 4608 nel velluto — Ricavò Lire 4888.

RAPPRESENTAZIONE DEI NUMERI CON LETTERE DELL'ALFABETO.

87. Finora abbiamo espresso le quantità con numeri; ma spesso, per dare più generalità alle dimostrazioni, giova rappresentare i numeri colle lettere dell'alfabeto. — Così un numero qualunque potrà rappresentarsi colla lettera a, un altro colla lettera b, un altro con la c, con la d ec.; ma le operazioni dell'aritmetica sopra le quantità così espresse non potendosi effettuare come sopra i numeri, bisogna limitarsi ad indicarle; e questa indicazione di operazioni da eseguirsi sopra lettere, il cui valore non è ancora determinato, prende il nome di *formula algebrica.*

ESEMPI:

1.° $a + b + c$ indica la somma delle quantità rappresentate dalle lettere a, b, c.

2.° $a^3 + b^2$, rappresenta la somma del cubo del numero espresso da a col quadrato del numero rappresentato da b.

3.° $a - b$ indica la differenza dei numeri rappresentati da a e b.

4.° $a^5 + 2b - c$ indica che alla quinta potenza del numero espresso da a devesi aggiungere due volte il numero rappresentato da b, e dal resultato sottrarre il numero espresso da c. — Il numero che precede una lettera, chiamasi *coefficiente.*

— Così in $5a$, che vale $a + a + a + a + a$, 5 è il coefficiente (1).

5.° $a \times b \times c$, o abc, indica il prodotto dei numeri rappresentati dalle lettere a, b, c.

6.° $a^3 \times b^2$, o a^3b^2, indica che il cubo del numero rappresentato da a deve moltiplicarsi pel quadrato del numero espresso da b.

7.° $a : b = q$ esprime il quoziente della divisione dei numeri rappresentati da a e da b.

8.° $\frac{a^3 - b^2}{a + b}$ indica che dal cubo del numero rappresentato da a devesi sottrarre il quadrato del numero espresso da b, e il resultato devesi dividere per la somma degli stessi numeri a e b.

88. Un' espressione della forma

$$3a + 4b^2 - 5c + d$$

chiamasi *polinomio*.

89. Vediamo ora come si possono effettuare le operazioni fondamentali dell'aritmetica sulle quantità espresse algebricamente, limitandoci però ai casi i più semplici, sui quali dovremo appoggiarci nel seguito di questo trattato.

90. Addizione. — Debbasi calcolare la somma $(a - b) + (b - c)$. Questa espressione potrà scriversi ancora così:

$$a - b + b - c.$$

Ma poichè da una parte la quantità rappresentata da b è sottratta, e dall' altra è aggiunta, queste due operazioni si compensano; e per conseguenza l' espressione $a - b + b - c$ si riduce ad $a - c$. Il che fa dire che *le quantità uguali precedute da segno contrario si distruggono.* — Questa semplificazione in Algebra si chiama *riduzione dei termini simili.*

Al modo stesso si vedrà che

$$c + d - a + d + a = c + 2d.$$

(1) Guardiamoci di non confondere il *coefficiente* coll'*esponente;* il coefficiente indica quante volte meno una la quantità che esso affetta deve aggiungersi a sè stessa; mentre che l'esponente indica quante volte questa quantità deve esser presa come fattore.

Così $3a = a + a + a$; e $a^3 = a \times a \times a$.

91. Sottrazione. — Debbasi sottrarre l'espressione $c - d$ dall'espressione $a - b$.

Potremo scrivere:

$$(a - b) - (c - d),\ \text{oppure:}\ a - b - (c - d).$$

Ora è chiaro che se dalla quantità $a - b$ si dovesse togliere tutta la quantità c, il resultato sarebbe $a - b - c$; ma non è c che devesi togliere, ma c diminuito prima della quantità d: per conseguenza il resultato $a - b - c$ è troppo piccolo di tutta la quantità d, la quale perciò bisognerà aggiungere al resultato trovato, onde avere il suo giusto valore, ed avremo:

$$a - b - (c - d) = a - b - c + d.$$

Da ciò resulta che, *per sottrarre un polinomio da un altro, bisogna scrivere il primo di seguito al secondo, cangiando i segni a tutti i termini del polinomio da sottrarre.*

Questa regola si deduce anche dal n.° 42.

Infatti, sappiamo che la differenza di due numeri non cambia aumentando l'uno e l'altro di una stessa quantità; quindi se ai due termini della differenza

$$(a - b) - (c - d)$$

si aggiunge una stessa quantità d, la differenza non resta alterata, e si ha:

$$(a - b + d) - (c - d + d);$$

ma nel secondo termine le due quantità $- d + d$ si distruggono, e resta:

$$(a - b + d) - c;$$

o, ciò che è lo stesso:

$$a - b - c + d.$$

Con questa regola, e con ragionamenti analoghi, si troverà:

$$2a - (2b - 3c) = 2a - 2b + 3c.$$
$$5a - 4b - (6d - f + g) = 5a - 4b - 6d + f - g.$$

92. Moltiplicazione. — Debbasi moltiplicare $a - b$ per c. — Questa espressione potrà scriversi:

$$(a - b) \times c,\ \text{o}\ (a - b)\, c.$$

Ma $(a - b)\, c$ è uguale a $c\,(a - b)$ (vedi n.° 48. 3°). Ora dimostrammo (n.° 60) che per moltiplicare una differenza per un numero

qualunque, basta moltiplicare i suoi due termini per questo numero; quindi il prodotto cercato sarà $ac - bc$.

Cioè: $$(a - b)\,c = ac - bc.$$

Sia ancora da moltiplicare $(a - b)$ per $(c - d)$. Questo prodotto può indicarsi così:

$$(a - b)\,(c - d).$$

Ma per moltiplicare una differenza per una differenza bisogna moltiplicare ciascuna parte del moltiplicando per ciascuna parte del moltiplicatore, e sottrarre i resultati; avremo perciò:

$$\begin{aligned}(a - b)\,(c - d) &= (a - b)\,c - (a - b)\,d \\ &= (ac - bc) - (ad - bd);\end{aligned}$$

e per la regola del n.° 91:

$$(ac - bc) - (ad - bd) = ac - bc - ad + bd.$$

Dunque, *per effettuare la moltiplicazione di due polinomi, bisogna moltiplicare separatamente ciascun termine del moltiplicando per ciascun termine del moltiplicatore, osservando rispetto ai segni, che se i due termini che si moltiplicano sono preceduti dallo stesso segno, il loro prodotto deve avere innanzi il segno* $+$; *e se sono preceduti da segni contrarii, il loro prodotto deve avere innanzi il segno* $-$.

Secondo questa regola, troveremo:

$$\begin{aligned}(a + b)\,(c - d) &= ac + bc - ad - bd.\\ (a - b)\,(c + d) &= ac - bc + ad - bd.\end{aligned}$$

93. Divisione. — Si debba dividere abc per bde.

Si potrà scrivere: $abc : bde$ o $\frac{abc}{bde.}$

Ora sappiamo (vedi n.° 83) che in qualunque divisione il quoziente non cambia quando si divide il dividendo e il divisore per una stessa quantità: potremo dunque nell'espressione precedente dividere per b il dividendo e il divisore, e si avrà:

$abc : bde$ o $\frac{abc}{bde} = \frac{ac}{de}$ che è il quoziente richiesto.

Così il quoziente della divisione di mnp per np sarà m, perchè np è fattore comune al dividendo e al divisore (n°. 84).

Infatti, moltiplicando il divisore np pel quoziente m, si riproduce il dividendo mnp.

Gli altri casi della divisione sono inutili per l'oggetto che ci siamo proposti.

ESERCIZI

XXV. Verificare le seguenti uguaglianze:

$$3a - 5a + 7a + 2b - c + 4b = 5a + 6b - c.$$
$$(7a - 5c + 3b) + (2a - 3c - 7b) = 9a - 8c - 4b.$$
$$(5a + 4b - 3c - 7d - 8) + (8a - 12b + 7c - 10d + 4)$$
$$= 13a - 8b + 4c - 17d - 4.$$
$$(-7f + 3a) + (4f - 2a) + (3f - 3a) + 2a = o.$$

$$(3a - 2b + 6) - (2a - 7b - 3) = a + 5b + 9.$$
$$(13a - 2b + 9c - 3d) - (8a - 6b + 9c - 10d + 12)$$
$$= 5a + 4b + 7d - 12.$$
$$(-7f + 3m - 8x) - (-6f - 5m - 2x + 3d + 8)$$
$$= -f + 8m - 6x - 3d - 8.$$
$$(3c - 2l + 5c) - (8l + 7c - 4l) = c - 6l.$$

$$a \times b \times c = a.\,b.\,c = abc = acb = bac = bca = cab = cba.$$
$$-a \times b = -ab; \quad a \times -b = -ab; \quad -a \times -b = ab.$$
$$6a \times 7b = 42\,ab; \quad 7a \times -10b = -70ab.$$
$$-6a \times -11x = 66ax; \quad ab \times cde = abcde.$$
$$3ab \times 2cd \times dfg = 6abcdfg.$$
$$-a \times -a \times -a \times -a = a^4.$$
$$(6a + 3b - 5f) \times 5g = 30ag + 15bg - 25fg.$$
$$(-2b + 3c - g) \times -8h = 16bh - 24ch + 8gh.$$
$$(a + b - c) \times (d - e) = ad + bd - cd - ae - be + ce.$$
$$(a + b + c) \times (a + b - c) = a^2 + 2ab + b^2 - c^2.$$
$$(5a^2 - 3ab + 7b^2) \times (3a - b) = 15a^3 - 14a^2b + 24ab^2 - 7b^3.$$

$$abc : ad = \frac{bc}{d}; \quad \frac{16a}{8b} = \frac{2a}{b}; \quad \frac{12abcde}{8acd} = \frac{3be}{2}$$
$$35abfgm : 5abfm = 7g; \quad 27a^3b^2cfg : 18abcghk = \frac{3a^2bf}{2hk}.$$

Rappresentazione di un numero mediante un polinomio ordinato secondo le potenze del dieci.

94. Dicemmo al n.° 11 che nel nostro sistema di numerazione la *base* 10 forma l'unità di *secondo ordine:* ora è facile comprendere che il suo quadrato $10^2 = 100$, forma l'unità del *terzo ordine;* che il suo cubo $10^3 = 1000$, forma l'unità del *quart' ordine,* è così di seguito.

Quindi un numero qualunque potrà rappresentarsi con un polinomio ordinato secondo le potenze crescenti o decrescenti del 10.

Così, per esempio, il numero 7542, che vale 7 unità di quart' ordine, più 5 unità di terz' ordine, più 4 unità di secondo, più 2 unità di primo, cioè $7000 + 500 + 40 + 2$, potrà esprimersi col polinomio:

$$7 \times 10^3 + 5 \times 10^2 + 4 \times 10 + 2,$$

o, inversamente:

$$2 + 4 \times 10 + 5 \times 10^2 + 7 \times 10^3.$$

In generale, rappresentando con a, b, c, d ..... le diverse cifre che compongono un numero, se a indica le unità di 1° ordine, b quelle di 2°, c quelle di 3°, d quelle di 4° ....., questo numero si potrà esprimere col polinomio

$$d \times 10^3 + c \times 10^2 + b \times 10 + a,$$

oppure:

$$a + b \times 10 + c \times 10^2 + d \times 10^3.$$

Se qualche cifra del numero è *zero,* scomparisce dal polinomio il termine ad essa relativo.

ESERCIZI

XXVI. Verificare l'uguaglianza:

$$5 \times 10^3 + 6 \times 10^2 + 4 \times 10 + 3 = 5643.$$

XXVII. Rappresentare i numeri 3524, 79315, 70322 mediante polinomi ordinati secondo le potenze del dieci.

XXVIII. Fare lo sviluppo del polinomio

$$7 \times 10^3 + 4 + 10^2 + 5 \times 10 + 8.$$

Differenti sistemi di numerazione.

95. Sappiamo che nel sistema decimale sono necessarie dieci unità di un ordine per formare un' unità di un ordine superiore, e che, essendo 10 la *base*, si richiedono nove cifre oltre lo zero.

Ora, qualunque altro numero può essere scelto per base, e in questo caso il numero delle cifre necessarie, compreso lo zero, è uguale al numero di unità contenute nella base. Se si prende, per esempio, per base il *due*, si ha il sistema *binario;* si conviene cioè che due unità di un ordine formino una unità di un ordine superiore, e questo sistema richiede le due cifre 0, 1.

Se prendesi per base il *tre*, si ha il sistema *ternario*, e si conviene che tre unità di un ordine formino un' unità di un ordine superiore; questo sistema esige le sole tre cifre 0, 1, 2.

Prendendo per base il *quattro*, si ha il sistema *quaternario*, il quale richiede le cifre 0, 1, 2, 3.

Prendendo il *cinque*, si ha il sistema *quinario*, che esige le cifre 0, 1, 2, 3, 4.

In generale, qualunque sia il numero scelto per base, si richiedono tante cifre, compreso sempre lo zero, quante sono le unità del numero stesso. E se la base scelta è maggiore di *dieci* bisognerà, per conseguenza, fare uso di più di 10 caratteri, i quali potranno rappresentarsi con lettere.

Così, per esempio, nel sistema *duodecimale*, sarebbero necessarie undici cifre oltre lo zero, cioè:

1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, *a*, *b*, 0,

a e *b*, o qualunque altro carattere, rappresentando *dieci e undici*.

96. Ciò premesso, proponiamoci di risolvere i tre problemi seguenti:

Proplema 1.° — *Dato un numero scritto nel sistema decimale, scriverlo in un sistema qualunque.*

Abbiasi, per esempio, il numero 529, da scriversi nel sistema *senario*.

Ragioneremo così: poichè *sei* unità semplici formano una unità di second' ordine, dividendo 529 per 6, il quoziente 88 esprimerà unità di second' ordine, ed il resto 1, rappresenterà unità semplici. Ora poichè *sei* unità di second' ordine valgono una unità di terzo, se si divide il quoziente 88 per 6, il resultato 14

rappresenterà unità di terz'ordine, e il resto 4 indicherà quelle di secondo. Al modo stesso si vede che, dividendo 14 per 6, il quoziente 2 esprimerà unità di quart'ordine, ed il resto 2 quelle di terzo.

Cosicchè il numero dato 529, nel sistema senario si scriverà con 2241, e potrà rappresentarsi col polinomio:

$$2 \times 10^3 + 2 \times 10^2 + 4 \times 10 + 1,$$

nel quale il 6 è rappresentato da 10.

97. Da questo esempio si deduce che:

Per scrivere un numero in un sistema qualunque di numerazione, basta dividerlo per la base tante volte, quante si può, finchè siasi ottenuto un quoziente minore della base. — I resti che si ottengono successivamente, e che possono essere anche ZERO, *rappresentano le unità semplici, e l' ultimo le unità dell' ordine più elevato.*

98. Applichiamo questa regola ad alcuni esempi.

Debbasi scrivere il numero 1528 nel sistema la cui base è 8, o ottonario.

Ecco il tipo del calcolo:

Divisioni per 8.	Resti.	Numero cercato.
1528 : 8		
191	0	
23	7	2770.
2	7	
0	2	

Dunque nella base 8 il numero 1528 è uguale a 2770.

Lo stesso numero nel sistema ternario sarebbe espresso da 2002121.

Sia il numero 8493 scritto nel sistema decimale, e si voglia ridurre nel sistema di base 12, o duodecimale.

Secondo la regola enunciata, si avrà:

Divisioni per 12	Resti	Numero cercato.
8493 : 12		
707	9	
58	11	$4ab9$.
4	10	
0	4	

Dunque nella base 12 il numero 8493 si scriverà con $4ab9$, rappresentando 10 con a e 11 con b.

Al modo stesso si troverà che il numero 185446 scritto nel sistema duodecimale è rappresentato da $8b39a$.

99. Problema 2.° — *Dato un numero scritto in qualunque sistema, tradurlo nel sistema decimale.*

Sia il numero 2314 scritto nella base 5, e vogliasi tradurre nel sistema decimale. A tale oggetto osserveremo che, essendo 5 la base, o l'unità di second'ordine, l'unità di terzo sarà 5^2, quella di quarto sarà 5^3, e così di seguito. — Ora, la cifra 4 del numero dato 2314 rappresenta le unità semplici; la cifra 1, quelle di second'ordine, la cifra 3, quelle di terzo, e la cifra 2, quelle di quarto. Dunque nel sistema quinario sarà:

$$2314 = 2 \times 5^3 + 3 \times 5^2 + 1 \times 5 + 4.$$

Effettuando le operazioni indicate, si ha 334 pel numero decimale cercato.

Dunque:

100. *Per ridurre un numero da una base alla base* DIECI, *si moltiplica la prima cifra a sinistra per la base in cui è scritto, e al prodotto si aggiunge la seconda cifra; poi si moltiplica il resultato per la base, e al prodotto si aggiunge la terza cifra, e così di seguito.*

Esempio 1.° — Sia il numero 1314, scritto nella base *sette*, e vogliasi tradurre nella base *dieci*.

In pratica l'operazione può disporsi così:

$$1 \times 7 = 7 \quad \ldots\ldots \quad 7 + 3 = 10.$$
$$10 \times 7 = 70 \quad \ldots\ldots \quad 70 + 1 = 71.$$
$$71 \times 7 = 497 \quad \ldots\ldots \quad 497 + 4 = 501.$$

Dunque il numero 1314 nella base 10, si scrive con 501.

Esempio 2.° — Abbiasi il numero $8b39a$ scritto nella base dodici, e vogliasi tradurre nella base *dieci*.

Ricordando che b rappresenta 11 e a rappresenta 10, dalla regola sopra esposta si ha:

$$8 \times 12 = 96 \quad \ldots\ldots \quad 96 + 11 = 107.$$
$$107 \times 12 = 1284 \quad \ldots\ldots \quad 1284 + 3 = 1287.$$
$$1287 \times 12 = 15444 \quad \ldots\ldots \quad 15444 + 9 = 15453.$$
$$15453 \times 12 = 185436 \quad \ldots\ldots \quad 185436 + 10 = 185446.$$

Dunque il numero $8b39a$ nella base 10 si scrive con 185446.

101. Problema 3.° — *Dato un numero scritto in un sistema qualunque, scriverlo in un altro sistema.*

Per risolvere questo problema basterà prima ridurre il numero dato nella base 10, e da questa nella base del nuovo sistema, secondo le regole esposte. (vedi num. 97 e 100).

Così il numero 1314, scritto nel sistema settenario, equivale a 2153, nel sistema senario.

Ecco il tipo del calcolo :

1314

$1 \times 7 = 7$ . . . . . $7 + 3 = 10.$
$10 \times 7 = 70$ . . . . . $70 + 1 = 71.$
$71 \times 7 = 497$ . . . . . $497 + 4 = 501.$

Divisioni per 6.	Resti.	Numero cercato.
501 : 6.		
83	3	
13	5	2153.
2	1	
0	2	

Per verificare l'esattezza dell' operazione, basterebbe tradurre questo numero dalla base *sei*, nella base *sette*.

102. I metodi che abbiamo dati per effettuare le prime quattro operazioni dell' aritmetica sopra i numeri interi, scritti nel sistema decimale, si applicano ai numeri interi, scritti in qualunque altro sistema di numerazione, con questa sola differenza, che la base *dieci* dev' essere sostituita dalla base del sistema di cui si fa uso, e che, per conseguenza, la riunione di tante unità d'un certo ordine quante sono le cifre che s'impiegano in questo sistema, forma un' unità dell'ordine immediatamente superiore.

ESERCIZI

XXIX. Scrivere i quaranta primi numeri interi nel sistema settenario.

XXX. A qual numero decimale corrisponderebbe 212 scritto nel sistema ternario?

XXXI. crivere i venticinque primi numeri interi nel sistema binario.

XXXII. Scrivere i cinquanta primi numeri interi nel sistema duodecimale.

XXXIII. Calcolare a qual numero decimale corrisponde il numero duodecimale $7a8b$.

XXXIV. Tradurre nel sistema di base 8 il numero $3a5b$, scritto nel sistema duodecimale.

DIVISIBILITÀ DEI NUMERI.

103. Si dice che un numero è *multiplo* di un altro, quando lo contiene una o più volte esattamente. — Così i numeri 4, 6, 8, 10 ec. sono multipli di 2.

Reciprocamente, chiamasi *divisore*, *sottomultiplo* o *parte aliquota* d'un numero un secondo numero che è contenuto una o più volte esattamente nel primo. — Così 2 è un divisore, sottomultiplo o parte aliquota di 4, di 6, di 8, di 10 ec.

I caratteri o condizioni di divisibilità dei numeri si appoggiano sopra i seguenti teoremi.

104. Teorema 1°. *Se un numero divide esattamente le parti di una somma, divide anche la somma.*

Così, 8 che divide esattamente 16 e 24, dividerà anche la loro somma $16 + 24 = 40$.

Infatti, 16 e 24, essendo multipli di 8, avremo:

$$16 = 8 + 8, \text{ e } 24 = 8 + 8 + 8.$$

Per conseguenza la somma

$$16 + 24 = 8 + 8 + 8 + 8 + 8 = 8 \times 5$$

è divisibile per 8.

Questo teorema può dimostrarsi anche nel modo generale seguente:

Se a e b sono due numeri divisibili per un altro numero n, ed s è la loro somma, si ha:

$$s = a + b$$

Dividendo ambedue i membri di questa uguaglianza per n, si ottiene:

$$\frac{s}{n} = \frac{a}{n} + \frac{b}{n}.$$

Ora, a e b essendo per ipotesi divisibili per n, $\frac{a}{n}$ e $\frac{b}{n}$ sono numeri interi; dunque la loro somma $\frac{s}{n}$ è pure un numero intero: dunque s è divisibile per n.

La dimostrazione è evidentemente generale e si applica a più numeri qualunque.

Così, 7 che divide 35, 28 e 49, divide anche la loro somma $35 + 28 + 49 = 112$.

105. Teorema 2.° — *Qualunque numero che ne divide un altro, ne divide i multipli.*

Così, 4 che divide esattamente 12, divide anche un multiplo qualunque di 12, per esempio, 5 volte 12 o 60.

Infatti, $60 = 12 + 12 + 12 + 12 + 12$.

Ora, per ipotesi il 4 divide esattamente tutte le parti del secondo membro di questa uguaglianza, che formano la somma 60; dunque anche 60 è divisibile esattamente per 4, e ciò in virtù del teorema precedente.

Corollario — *Qualunque numero intero che divide esattamente un altro numero intero, ne divide anche tutte le potenze.*

Così, 3 che divide 9, dividerà anche 9^2, 9^3, 9^4 .....

106. Teorema 3.° — *Qualunque numero che ne divide esattamente due altri, divide anche la loro differenza.*

Così, i due numeri 45 e 30, essendo divisibili per 5, la loro differenza $45 - 30 = 15$, è pure divisibile per 5.

Infatti, 45 e 30 essendo multipli di 5, anche la loro differenza è un multiplo di 5; perchè $45 = 5 \times 9$ e $30 = 5 \times 6$; quindi

$$45 - 30 = 5 \times 9 - 5 \times 6,$$

ovvero

$$45 - 30 = 5 \times (9 - 6).$$

Ora, il secondo membro di questa uguaglianza essendo un multiplo di 5, è divisibile per 5; dunque anche il primo membro, o la differenza $45 - 30$, è divisibile per 5.

Questo teorema, come il primo, può dimostrarsi in un modo generale, come segue:

Se a e b sono due numeri divisibili per n, e d è la loro differenza, si ha:

$$d = a - b.$$

Dividendo per n ambedue i membri di questa uguaglianza, avremo:

$$\frac{d}{n} = \frac{a}{n} - \frac{b}{n}.$$

Ora, a e b essendo per ipotesi divisibili per n, $\frac{a}{n}$ e $\frac{b}{n}$ sono due numeri interi; dunque la loro differenza è pur un numero intero: dunque d è divisibile per n.

Corollario. — *Un numero che divide una somma ed una delle sue parti, divide anche l' altra parte.*

Sia l' uguaglianza $45 = 30 + 15$. — Dico che se 5 divide 45 e 30, dividerà anche 15.

Infatti, l' uguaglianza precedente si trasforma in quest'altra:

$$45 - 30 = 15.$$

Ora 45 e 30 essendo divisibili per 5, anche 15 sarà divisibile per 5.

107. Teorema 4.° — *Se due numeri divisi per un terzo dànno resti uguali, la loro differenza è divisibile per questo terzo numero; e reciprocamente, sa la differenza di due numeri è divisibile per un terzo, questi due numeri divisi pel terzo daranno resti uguali.*

Si abbiano i due numeri 35 e 47, i quali divisi per 6 dànno un resto uguale 5; io dico che la differenza 12 di questi due numeri è divisibile per 6.

Infatti, togliamo dai due numeri i resti che per supposizione sono uguali; avremo:

$$35 - 5 = 30; \qquad 47 - 5 = 42.$$

Ora la differenza dei due numeri 30 e 42 è la stessa di quella di 35 e 47, perchè la differenza di due numeri non cambia togliendo da ambedue uno stesso numero (vedi n.° 42). Ma dopo questa sottrazione i due numeri sono divisibili esattamente pel divisore 6; per conseguenza anche la loro differenza 12 è divisibile per questo stesso numero, e ciò pel teorema 3.°

Reciprocamente, se la differenza 12 dei due numeri 35 e 47 è divisibile per 6, questi due numeri divisi per 6, daranno resti uguali.

Infatti, potremo considerare 47 come uguale a $35 + 12$; ora è evidente che dividendo per 6 questa somma $35 + 12$ la seconda parte 12, dividendosi esattamente e dando per quoziente 2, non farà altro che aumentare il quoziente di 2 unità, e il resto risulterà soltanto dalla divisione di 35 per 6. Quindi 47, diviso per 6, lascia lo stesso resto che 35 diviso per lo stesso numero 6, come si doveva dimostrare.

108. Teorema 5.° *Se due o più numeri si dividono per uno stesso divisore, la somma dei numeri dati e la somma dei resti, divise pel divisore, dànno resti uguali.*

Sieno i numeri 35, 47, 66, e sia 9 un divisore qualunque; dividendo i tre numeri dati per 9, si hanno i resti respettivi 8, 2, 3.

Si vuol provare che la somma $35 + 47 + 66$, divisa per 9, dà lo stesso resto della somma $8 + 2 + 3$, divisa per 9.

Infatti, si hanno le uguaglianze:

$$35 = 9 \times 3 + 8$$
$$47 = 9 \times 5 + 2$$
$$66 = 9 \times 7 + 3.$$

Sommandole membro a membro, si troverà:

$$35 + 47 + 66 = (9 \times 3 + 8) + (9 \times 5 + 2) + (9 \times 7 + 3):$$

ovvero, osservando che nel secondo membro di questa uguaglianza 9 è fattor comune ai numeri 3, 5, 7, si potrà scrivere:

$$35 + 47 + 66 = 9 \times (3 + 5 + 7) + 8 + 2 + 3.$$

Ora $9 \times (3 + 5 + 7)$ è un multiplo di 9; per conseguenza, diviso per 9, non dà resto; dunque il resto della divisione per 9 della somma dei numeri dati $35 + 47 + 66$ è uguale al resto della divisione per 9 della somma dei resti $8 + 2 + 3$, come si doveva dimostrare.

Dimostrazione generale. Indichiamo con A, B, C tre numeri qualunque, e supponiamo che, divisi per uno stesso divisore d, si sieno ottenuti i quozienti q, q', q'', coi resti respettivi r, r', r''. Avremo le seguenti uguaglianze:

$$A = d \times q + r$$
$$B = d \times q' + r'$$
$$C = d \times q'' + r''.$$

Sommando membro a membro queste uguaglianze, si troverà:

$$A + B + C = d \times (q + q' + q'') + r + r' + r''.$$

Ora $d \times (q + q' + q'')$ è un multiplo di d, per conseguenza, diviso per d non dà resto; dunque il resto della divisione di $A + B + C$ per d, è uguale a quello della divisione di $r + r' + r''$ per lo stesso divisore d, come si voleva dimostrare.

Corollario. — Se la somma dei resti è esattamente divisibile pel divisore, anche la somma dei numeri dati sarà esattamente divisibile per lo stesso divisore.

Esempio — I numeri 25, 37 e 42, divisi ciascuno per 8, dànno per resti 1, 5 e 2; la somma di questi resti $1 + 5 + 2 = 8$.

divisa per 8, dà per resto *zero*, e la somma dei numeri $25 + 37 + 42 = 104$, divisa per 8, dà pure per resto *zero*.

109. Teorema 6.° *Se due numeri si dividono per uno stesso divisore, il prodotto dei numeri dati e il prodotto dei resti, divisi pel divisore, dànno resti uguali.*

Sieno 58 e 79 due numeri interi e sia 9 un divisore qualunque; dividendo i due numeri dati per 9, si hanno i resti respettivi 4 e 7.

Si vuol provare che il prodotto dei due numeri 58×79, diviso per 9, dà lo stesso resto del prodotto 4×7, diviso parimente per 9.

Infatti, si hanno evidentemente le uguaglianze:

$$58 = 9 \times 6 + 4$$
$$79 = 9 \times 8 + 7.$$

Moltiplicandole membro a membro, si ottiene:

$$58 \times 79 = (9 \times 6 + 4) \times (9 \times 8 + 7).$$

Ora, il secondo membro di questa uguaglianza è il prodotto di due somme, il quale si otterrà (n.° 59) moltiplicando ciascuna parte della prima per ciascuna parte della seconda, cioè moltiplicando 9×6 e 4 prima per 9×8 e poi per 7, e sommando i prodotti. — Perciò si avrà:

$$58 \times 79 = (9 \times 6 \times 9 \times 8) + (4 \times 9 \times 8) + (9 \times 6 \times 7) + 4 \times 7.$$

Osservando che tutti i termini del secondo membro di questa uguaglianza sono multipli di 9, eccettuato 4×7, potremo scrivere:

$$58 \times 79 = \text{un multiplo di } 9 + 4 \times 7.$$

Ma un multiplo di 9, diviso per 9, non dà resto; per conseguenza, il resto della divisione per 9 del prodotto 58×79 è uguale a quello della divisione per 9 del prodotto dei resti 4×7, come dovevasi dimostrare.

Dimostrazione generale. Sieno A e B due numeri interi qualunque, sia d un divisore, q e q' sieno i quozienti ottenuti dividendo A e B per d, ed r e r' i resti respettivi; avremo le uguaglianze:

$$A = d \times q + r$$
$$B = d \times q' + r'.$$

Moltiplicandole membro a membro, si ha;

$$A \times B = (d \times q + r) \times (d \times q' + r');$$

e sviluppando, si ottiene:

$$A \times B = (d \times q \times d \times q') + (r \times d \times q') + (d \times q \times r') + r \times r';$$

Ora tutti i termini del secondo membro di questa uguaglianza sono multipli di d, eccettuato $r \times r'$; dunque potremo scrivere:

$$A \times B = \text{un multiplo di } d + r \times r'.$$

Ma un multiplo di d, diviso per d, non dà resto; per conseguenza, il resto della divisione per d del prodotto $A \times B$ è uguale a quello della divisione per d del prodotto dei resti $r \times r'$, come era da dimostrare.

La dimostrazione è evidentemente generale, e si applica anche a più numeri qualunque.

Corollario. — Se il prodotto dei resti è esattamente divisibile pel divisore, anche il prodotto dei numeri dati sarà esattamente divisibile per lo stesso divisore.

Esempio — I numeri 47, 66 e 69, divisi ciascuno per 9, dànno i respettivi resti 2, 3 e 6; il prodotto di questi resti $2 \times 3 \times 6 = 36$, diviso per 9, dà per resto *zero*, e il prodotto dei numeri $47 \times 66 \times 69 = 214038$, diviso per 9, dà pure per resto *zero*.

Caratteri di divisibilità.

110. 1.° *Un numero è divisibile per 2 quando è pari, cioè terminato a destra da una delle cifre 0, 2, 4, 6, 8.*

Osserviamo primieramente che un numero terminato da uno o più zeri, è un multiplo di 10; e poichè 2 e 5 sono divisori di 10, ne resulta che un numero terminato da uno zero è divisibile per 2 e per 5. — Così $7500 = 750 \times 10$ è un multiplo di 10, e 10 essendo divisibile per 2 e per 5, anche 7500 è divisibile per 2 e per 5 (n.° 105).

Ciò posto, un numero che ha più di una cifra può decomporsi in due parti, cioè in diecine e unità; per esempio, il numero 7136 è uguale a $7130 + 6$; ora, la prima parte 7130 essendo terminata da *zero*, è divisibile per 2; dunque se anche la cifra delle unità è divisibile per 2, in virtù del 1° teorema, il numero totale sarà divisibile per 2.

111. 2.° *Un numero è divisibile per* 5, *quando è terminato da un* 0 *o da un* 5.

Abbiasi il numero 3125. — Esso può decomporsi in $3120 + 5$; ora le due parti di questa somma essendo divisibili per 5, il numero 3125 è divisibile per 5, e ciò in virtù del 1.° teorema.

112. 3.° *Un numero è divisibile per* 4 *o per* 25, *quando le sue ultime due cifre formano un numero divisibile per* 4 *o per* 25.

Abbiasi il numero 3575. — Esso può decomporsi in $3500 + 75$. Ora la prima parte 3500 essendo un multiplo di 100, sarà divisibile per 4 e per 25, che sono divisori di 100. Se dunque anche la seconda parte 75 è divisibile per 4 o per 25, il numero dato è divisibile per 4 o per 25.

I soli numeri di due cifre divisibili per 25 essendo 25, 50, 75, e quelli terminati da *due zeri*, si conchiude che, affinchè un numero sia divisibile per 25 è necessario che termini per *due zeri*, 25, 50, 75.

113. 4.° *Un numero è divisibile per* 8 *o per* 125, *quando le ultime sue tre cifre formano un numero divisibile per* 8 *o per* 125.

Abbiasi il numero 89104. — Esso può decomporsi in $89000 + 104$. Ora la prima parte 89000 essendo un multiplo di 1000 è divisibile per 8 e per 125, che sono divisori di 1000; se dunque anche la seconda parte 104 è divisibile per 8 o per 125, il numero dato è divisibile per questi due numeri.

114. 5.° *Un numero è divisibile per* 9, *quando la somma delle sue cifre, considerate nel loro valore assoluto, è esattamente divisibile per* 9.

Per dimostrare questa verità, bisogna premettere:

1.° *Che qualunque numero formato dall'unità seguita da uno o più zeri, è un multiplo di* 9 *aumentato di* 1.

Infatti

$$10 = 9 + 1 = 9 \times 1 + 1;$$
$$100 = 99 + 1 = 9 \times 11 + 1;$$
$$1000 = 999 + 1 = 9 \times 111 + 1 \text{ ecc.}$$

Dal che si scorge che il resto della divisione per 9 dei numeri 10, 100, 1000 ecc. è sempre 1.

2.° *Che qualunque numero formato da una cifra significativa seguita da uno o più zeri, è un multiplo di* 9, *aumentato di questa cifra significativa.*

Infatti, sia per esempio, il numero 700. Si ha evidentemente:

$$700 = 7 \times 100;$$

ovvero $$700 = 7 \times (99 + 1) = 7 \times 99 + 7.$$

Dal che si deduce che il resto della divisione per 9 del numero 700 è 7.

La stessa dimostrazione potrebbe farsi sopra qualunque altro numero formato da una cifra significativa seguita da zeri. Ciò premesso, abbiasi il numero 8127; si avrà:

$$8127 = 8000 + 100 + 20 + 7.$$

Ora, per ciò che abbiamo sopra dimostrato, si ha:

$$\begin{aligned} 8000 &= \text{un multiplo di } 9 + 8, \\ 100 &= \text{un multiplo di } 9 + 1, \\ 20 &= \text{un multiplo di } 9 + 2, \\ 7 &= 7; \end{aligned}$$

dunque $8127 = \text{un multiplo di } 9 + (8 + 1 + 2 + 7)$.

Ma un multiplo di 9 diviso per 9 non dà resto; per conseguenza (vedi n.° 108) il resto della divisione per 9 del numero dato 8127 è uguale al resto della divisione per 9 della somma dei resti $8 + 1 + 2 + 7$, che sono le stesse cifre componenti il numero 8127; dunque se la somma $8 + 1 + 2 + 7$ è divisibile esattamente per 9, anche il numero dato sarà esattamente divisibile per 9, come si doveva dimostrare.

115. 6.° *Un numero è divisibile per* 3, *quando la somma delle sue cifre, considerate nel loro valore assoluto, è divisibile per* 3.

Sia il numero 7356. — Esso è uguale ad un multiplo di 9 aumentato di $7 + 3 + 5 + 6$ (vedi n.° 114); ora, qualunque multiplo di 9 è un multiplo di 3, dunque il numero 7356 è uguale a un multiplo di 3, aumentato di $7 + 3 + 5 + 6$; ma un multiplo di 3 diviso per 3 non dà resto; per conseguenza il resto della divisione per 3 del numero 7356 è uguale al resto della divisione per 3 della somma $7 + 3 + 5 + 6$ delle cifre che compongono il numero considerato; dunque se questa somma è divisibile esattamente per 3, anche il numero dato sarà esattamente divisibile per 3 (vedi n.° 108).

Corollario. — Facendo la somma delle cifre d'un numero, si possono omettere i multipli del divisore 3 o 9; oppure, ogni volta che una somma sorpassa 3 o 9, può sostituirsi ad essa la somma delle sue cifre.

116. 7.° *Un numero è divisibile per* 11, *quando è divisibile per* 11 *la differenza fra la somma delle cifre di posto impari,* cominciando da destra, *e la somma delle cifre di posto pari.*

Premetteremo che *l' unità seguita da uno o più zeri è un multiplo di* 11 *aumentato di* 1 *se il numero degli zeri è pari, e diminuito di* 1 *se il numero degli zeri è impari.*

Infatti, effettuando la divisione per 11 del numero 10000....,

$$\begin{array}{r|l} 10000\ .\ .\ .\ .\ . & 11 \\ \cline{2-2} 100 & 909\ .\ .\ .\ . \\ 1 & \end{array}$$

è evidente che i resti saranno alternativamente 1 e 10; l'ultimo di questi resti sarà uguale a 1, se il numero degli zeri del dividendo è pari, e uguale a 10 se il numero degli zeri è impari. Nel primo caso, il dividendo è uguale a un multiplo di 11 aumentato di 1; nel secondo caso è un multiplo di 11 diminuito di 1.

Da ciò resulta che *qualunque numero formato da una cifra significativa seguita da uno o più zeri è uguale ad un multiplo di* 11, *aumentato o diminuito di questa cifra, secondo che il numero degli zeri è pari o impari.*

Consideriamo, infatti, i numeri 700 e 7000. Essendo 100 un multiplo di 11 più 1, 700 sarà uguale a 7 volte un multiplo di 11 più 7 volte 1, vale a dire sarà uguale ad un multiplo di 11 più 7. Parimente, essendo 1000 un multiplo di 11 meno 1, 7000 sarà uguale a 7 volte un multiplo di 11 meno 7 volte 1, vale a dire sarà uguale ad un multiplo di 11 meno 7.

Si può dunque concludere che:

Qualunque numero è uguale ad un multiplo di 11 *aumentato della somma delle sue cifre di posto impari, a partir dalla destra, e diminuito della somma delle sue cifre di posto pari.*

Abbiasi il numero 74852, si avrà:

$$74852 = 70000 + 4000 + 800 + 50 + 2.$$

Ora, per ciò che abbiamo sopra dimostrato, si ha:

$$\begin{aligned} 70000 &= \text{un multiplo di } 11 + 7, \\ 4000 &= \text{un multiplo di } 11 - 4, \\ 800 &= \text{un multiplo di } 11 + 8, \\ 50 &= \text{un multiplo di } 11 - 5, \\ 2 &= \phantom{\text{un multiplo di } 11 +{}} 2; \end{aligned}$$

dunque

$$74852 = \text{un multiplo di } 11 + (2 + 8 + 7) - (5 + 4)$$

oppure $74852 = \text{un multiplo di } 11 + 17 - 9$

$$= \text{un multiplo di } 11 + 8.$$

Ma un multiplo di 11 diviso per 11 non dà resto; dunque il resto della divisione per 11 del numero 74852 è uguale al resto della divisione per 11 della somma delle sue cifre di posto impari, diminuita della somma delle sue cifre di posto pari; dunque se la differenza di queste due somme è *zero*, o se è divisibile per 11, il numero dato è divisibile per 11, come dovevasi dimostrare.

Esempio 1.° Sia il numero 36450678. Si ha:

$$(8 + 6 + 5 + 6) - (7 + 4 + 3) = 25 - 14 = 11.$$

Dunque 36450678 è divisibile per 11.

Esempio 2.° Sia il numero 64528794.

Si ha: $(4 + 7 + 2 + 4) - (9 + 8 + 5 + 6) = 17 - 28$; la differenza fra 17 e 28 è 11; dunque il numero 64528794 è divisibile per 11.

Prova per 9 e per 11.

117. I Teoremi precedenti dànno il modo di fare la prova pei divisori 9 e 11 delle quattro operazioni dell'aritmetica.

Prova dell'Addizione. *Per fare la prova per 9 dell'addizione di più numeri, si cercano i resti della divisione per 9 di questi numeri; la somma di questi resti, divisa per 9, deve lasciare lo stesso resto della somma dei numeri proposti.* — Ciò resulta dal Teorema 5.° n.° 108

Esempio:

Operazione. —		Resti della divisione per 9.
	8732	2
	341	8
	9038	2
Somma:	18111	12

Il resto della divisione per 9 della somma

$$1 + 8 + 1 + 1 + 1 \quad \text{è } 3;$$

il resto della divisione per 9 della somma dei resti 1 + 2 è 3; dunque la prova riesce.

Prova della sottrazione. *Per fare la prova per 9 della sottrazione di due numeri si cercano i resti della divisione per 9 del diminutore e della differenza trovata; la somma di questi resti, di-*

visa per 9, deve lasciare lo stesso resto del diminuendo. — Ciò resulta dal teorema 5°, perchè il diminuendo è uguale alla somma del diminutore e della differenza.

Esempio:

Operazione. — Resti della divisione per 9.

Diminuendo	3542	5
Diminutore	1984	4
Differenza :	1558	1

Il resto della divisione per 9 del diminuendo, è 5, come pure 5 è la somma dei resti della divisione per 9 del diminutore e della differenza; dunque l'operazione è probabilmente esatta.

Prova della Moltiplicazione. — *Per fare la prova per 9 della moltiplicazione di due numeri, si cercano i resti della divisione per 9 del moltiplicando e del moltiplicatore : il prodotto di questi resti, diviso per 9, deve lasciare lo stesso resto del prodotto dei numeri proposti.* — Ciò resulta dal teorema 6.°

Esempio.	Operazione	Resti
	3514	4
	83	2
	10542	8
	28112	
Prodotto	291662	8

Il moltiplicando ed il moltiplicatore, divisi per 9, lasciano respettivamente di resto 4 e 2; moltiplicando 4 per 2 si ha 8, che, diviso per 9, dà di resto 8. Il prodotto 291662, diviso per 9, lascia parimente di resto 8; dunque vi è probabilità che l'operazione sia esatta.

Prova della Divisione. — *Per fare la prova per 9 della divisione, si cercano i resti della divisione per 9 del divisore, del quoziente e del resto; il prodotto dei due primi resti, unito al terzo, deve dare, diviso per 9, lo stesso resto del dividendo.* — Ciò resulta dai teoremi 5.° e 6.°

Esempio: Dividendo 7384 per 85, si ha l'uguaglianza:

$$7384 = 85 \times 86 + 74.$$

Resti $\quad 4 \ . \ . \ . \ 4 \times 5 + 2 \ . \ . \ . \ 4.$

Il resto della divisione per 9 del divisore 85 è 4, quello del quoziente 86 è 5; moltiplicando 4 per 5, si ha 20, a cui aggiungendo il resto 2 della divisione per 9 del resto 74, si ottiene 22, che, diviso per 9, dà di resto 4. Ora anche il dividendo 7384, diviso per 9, lascia di resto 4; dunque può dirsi che l' operazione sarà esatta

Ciò che abbiamo detto pel divisore 9, può applicarsi al divisore 11 e a qualunque altro numero.

È però da osservare che questa maniera di fare la prova delle prime quattro regole non è rigorosa; perchè può darsi che la prova riesca e che l' operazione sia inesatta. Ciò accade quando al resultato si fosse posto un 9 invece di uno *zero*, o reciprocamente; o anche se una cifra del resultato fosse troppo grande e un' altra troppo piccola dello stesso numero di unità.

ESERCIZI

sulla divisibilità dei numeri.

XXXV. Si domandano i resti della divisione per 3, per 9 e per 11 dei numeri 232, 354, 74054, 68014, 5378962071, 65342160730.

XXXVI. Quali fra i seguenti numeri sono divisibili per 4?

8748, 3330, 5580, 9940.

XXXVII. Quali dei seguenti numeri sono divisibili per 3, per 9, per 5, per 25, per 8, per 125, per 11?

732, 9081, 205, 3400, 8748, 3891250, 1400250.

XXXVIII. Verificare per mezzo della prova per 9 le seguenti uguaglianze:

$$321 + 868 + 452 = 1641;\ 38244 - 19960 = 18284;$$
$$3864 \times 28 = 108192;\ 7800 = 53 \times 147 + 9.$$

MASSIMO COMUN DIVISORE.

118. Per *massimo comun divisore* di due o più numeri s'intende il più gran numero che li divide tutti esattamente.

Esempio: 12, 18 e 24 hanno per divisori comuni 1, 2, 3, 6: il loro massimo comun divisore è dunque 6.

La ricerca del massimo comun divisore di due numeri si fonda sopra i due seguenti teoremi:

119. Teorema 1.° — *Se due numeri sono divisibili l' uno per l' altro, il loro massimo comun divisore è uguale al minore dei due.*

Sieno i due numeri 48 e 6, che sono divisibili l' uno per l'altro; è evidente che 6 è un divisor comune a questi due numeri, e non può esservene uno maggiore, perchè un numero maggiore di 6 non potrebbbe divider 6. Dunque 6 è il loro massimo comun divisore.

120. Teorema 2.° — *Due numeri non divisibili l' uno per l'altro, hanno il medesimo massimo comun divisore che il minore di essi e il resto della loro divisione.*

Abbiansi i due numeri 324 e 84; vogliamo dimostrare che il massimo comun divisore di questi due numeri è lo stesso di quello che esiste fra il più piccolo, 84, e il resto, 72, della loro divisione.

Infatti, effettuando la divisione di 324 per 84, si ha l'uguaglianza:

$$324 = 84 \times 3 + 72.$$

Ora, qualunque divisore comune ai due numeri 324 e 84, dovendo dividere 84, divide anche il suo multiplo 84 $\times$ 3 (vedi n° 105). Dividendo dunque una somma, 324 e l' una delle sue parti, 84 $\times$ 3, deve necessariamente (vedi n° 106) dividere anche l'altra parte, 72.

Reciprocamente, qualunque divisor comune ai due numeri 84 e 72, dividendo le due parti, 84 $\times$ 3 e 72, della somma 324, divide anche questa somma (vedi n° 104). Dunque i divisori comuni ai due numeri 324 e 84 sono nello stesso tempo comuni ai due numeri 84 e 72, e reciprocamente; e, per conseguenza, il massimo comun divisore dei due numeri 324 e 84 è lo stesso del massimo comun divisore dei due numeri 84 e 72; come bisognava dimostrare.

121. Proponiamoci ora di trovare il massimo comun divisore di 324 e 84.

Ragioneremo così: il massimo comun divisore di 324 e 84 non può sorpassare 84: ora, poichè 84 divide sè stesso, se divide 324, pel 1° teorema, sarà esso il massimo comun divisore cercato. Siamo dunque condotti a tentare la divisione di 324 per 84. Effettuando l' operazione, si trova 3 per quoziente, col resto 72; cioè si ha:

$$324 = 84 \times 3 + 72.$$

La divisione dunque non si fa esattamente, e per conseguenza 84 non è il massimo comun divisore cercato; ma in virtù del 2° teorema, il massimo comun divisore dei numeri 324 e 84 è uguale al massimo comun divisore di 84 e del resto 72. Così, la questione è ridotta a cercare il massimo comun divisore di 84 e 72. Applicando a questi due numeri il ragionamento che abbiamo fatto sopra 324 e 84, saremo condotti a dividere 84 per 72.

Effettuando questa divisione, si trova 1 per quoziente, col resto 12; ed abbiamo:

$$84 = 72 \times 1 + 12.$$

Quindi concludiamo che 72 non è il massimo comun divisore domandato, ma questo è uguale al massimo comun divisore di 72 e 12. Dividendo 72 per 12, troviamo 6 per quoziente e *zero* per resto; e si ha:

$$72 = 12 \times 6;$$

dunque 12 è il massimo comun divisore richiesto.

Ecco come si dispone in pratica l' operazione:

324	84	72	12	0
	3	1	6	

Dall' esempio precedente si ricava la regola pratica:

122. *Per cercare il massimo comun divisore di due numeri, si divide primieramente il più grande pel più piccolo; se non vi è resto, questo numero più piccolo è esso stesso il massimo comun divisore. Se la divisione dà un resto, si divide il più piccolo dei due numeri dati per questo resto: e se la divisione si fa esattamente, il massimo comun divisore è questo primo resto. — Ma se vi è un nuovo resto, si divide il primo resto ottenuto pel secondo, e si continua sempre a dividere il resto precedente per l'ultimo, fino a che la divisione si faccia esattamente; allora l'ultimo resto che si sarà adoprato come divisore, sarà il massimo comun divisore richiesto.*

Quando l' ultimo resto, o divisore, è 1, i due numeri dati sono *primi fra loro*, vale a dire che non son divisibili per nessun numero, tranne l' unità (vedi n.° 131).

Applichiamo la regola esposta ad un secondo esempio.

Debbasi cercare il massimo comun divisore dei numeri 720 e 612.

OPERAZIONE

720	612	108	72	36	0
	1	5	1	2	

Dopo aver diviso 720 per 612, il che dà 1 per quoziente (che si pone sotto al divisore), e per resto 108, si scrive questo resto alla destra del più piccolo numero 612, e si divide 612 per 108. Si ottiene così un nuovo quoziente 5, che si pone sotto al divisore 108, e un resto 72, che si scrive alla destra del primo resto 108, e così di seguito.

Altro esempio. — Sieno i due numeri 3648 e 560, di cui si vuole il massimo comun divisore.

OPERAZIONE.

3648	560	288	272	16	0
			112		
	6	1	1	17	

Il massimo comun divisore è 16.

Si scorge da questo esempio che conviene scrivere i quozienti un poco in basso, pel caso in cui qualcuno di essi abbia più di una cifra, come avviene qui nella terza divisione.

123. Osservando, nell'esempio del n°. 121, che 324 è uguale a $84 \times 3 + 72$, e che 84 è uguale a $72 \times 1 + 12$, si vede (n. 104 e 105) che qualunque divisore comune ai due numeri 84 e 72, deve dividere 12; vale a dire che qualunque divisor comune ai due numeri 324 e 84 divide tutti i resti successivi che si trovano nell'applicare a questi due numeri la regola per la ricerca del massimo comun divisore; e, per conseguenza, divide il loro massimo comun divisore, il quale non è altro che l'ultimo di questi resti; dunque: *qualunque numero, che ne divide due altri, divide anche il loro massimo comun divisore;* e reciprocamente: *qualunque numero, che divide esattamente il massimo comun divisore di due altri numeri, divide ciascuno di questi numeri,* perchè ne sono multipli.

124. Trovato il massimo comune divisore di due numeri, cerchiamo quante volte esso è contenuto nei due numeri stessi e nella serie dei divisori successivi.

Riprendiamo l'esempio del n.° 122, cioè dei due numeri 720 e 612, il cui massimo comun divisore è 36.

È chiaro che

$$\begin{aligned} 720 &= 612 \times 1 + 108, \\ 612 &= 108 \times 5 + 72, \\ 108 &= 72 \times 1 + 36, \\ 72 &= 36 \times 2, \\ 36 &= 36 \times 1. \end{aligned}$$

Il massimo comun divisore 36 è contenuto 1 volta in 36 e 2 volte in 72. — Per vedere quante volte esso è contenuto in 108, basta sostituire nella terza uguaglianza a 72 il suo valore 36×2, e si avrà:

$$108 = 36 \times 2 \times 1 + 36 = 36 \times 3;$$

dal che si deduce che il 36 è contenuto 3 volte in 108.

Sostituendo nella seconda uguaglianza a 108 e a 72 i respettivi valori 36×3 e 36×2, si ha:

$$612 = 36 \times 3 \times 5 + 36 \times 2 = 36 \times 17;$$

dal che si vede che il 36 è contenuto 17 volte in 612.

Finalmente, sostituendo nella prima uguaglianza a 612 e a 108 i respettivi valori 36×17 e 36×3, si ha:

$$720 = 36 \times 17 \times 1 + 36 \times 3 = 36 \times 20;$$

dal che si vede che il 36 è contenuto 20 volte in 720.

Dunque si conclude che il massimo comun divisore 36 è contenuto 1 volta in 36, 2 volte in 72, 3 volte in 108, 17 volte in 612 e 20 volte in 720.

In pratica si opera nel modo seguente:

Operazione

720	612	108	72	36	0
	1	5	1	2	
20	17	3	2	1	

Si scrive 1 sotto l' ultimo quoziente 2, e questo si pone sotto il quoziente precedente 1; si moltiplicano fra loro questi due quozienti 1×2 e al prodotto si aggiunge 1; si ha così il numero 3, che ponesi sotto il 5 e indica che il 36 è contenuto 3 volte in 108; si moltiplicano fra loro i due numeri 5 e 3 e al prodotto 15 si aggiunge il numero precedente 2; con ciò si ha 17, che scrivesi sotto l' 1 e indica che il 36 è contenuto 17 volte in 612; finalmente si moltiplicano i due numeri 1 e 17 fra loro

e al prodotto si aggiunge il numero precedente 3; così si ha 20, che ponesi sotto il 720 e indica che il 36 è contenuto 20 volte in 720.

Ecco un altro esempio.

3085	910	355	200	155	45	20	5	0
	3	2	1	1	3	2	4	
617	182	71	40	31	9	4	1	

Spiegazione. — Posto l' 1 sotto l'ultimo quoziente 4, si scrive il 4 sotto il quoziente precedente 2; si moltiplica 2 per 4 e al prodotto si aggiunge 1, con che si ha 9, che scrivesi sotto il 3; si moltiplica 3 per 9 e si aggiunge 4 al prodotto, con che si ha 31, che ponesi sotto l' 1, e così di seguito, moltiplicando sempre il numero scritto sotto a ciascun quoziente pel quoziente stesso e aggiungendo al prodotto il numero precedentemente ottenuto.

Di questo calcolo vedremo l'applicazione nella teorìa delle frazioni.

Ricerca del massimo comun divisore di più numeri interi.

125. La ricerca del massimo comun divisore di più numeri si fonda sul seguente teorema:

Teorema 3.° — *Il massimo comun divisore di più numeri interi è lo stesso di quello del massimo comun divisore di due fra essi, e dei numeri dati che restano.*

Rappresentiamo con A, B, C, E quattro numeri interi qualunque, e con D il massimo comun divisore di A, e B; si vuol provare che il massimo comun divisore dei numeri dati A, B, C, E, è uguale al massimo comun divisore dei numeri D, C, E.

Infatti, qualunque divisor comune dei numeri dati A, B, C, E, dividendo A e B, divide il loro massimo comun divisore D, (n. 123); esso è dunque un divisor comune dei numeri D, C, E.

Reciprocamente, qualunque divisor comune dei numeri D, C, E, dividendo D, divide A e B, che sono multipli di D (n.° 105); esso è dunque un divisor comune dei numeri A, B, C, E.

Quindi, i numeri dati A, B, C, E, hanno i medesimi divisori comuni dei numeri D, C, E; per conseguenza, il massimo

comun divisore dei primi, è uguale al massimo comun divisore dei secondi, come era da dimostrare.

126. Applicando il teorema precedente ai tre numeri D, C, E, e chiamando D' il massimo comun divisore di D e di C, si dimostrerebbe al modo stesso che il massimo comun divisore di questi tre numeri, è uguale al massimo comun divisore dei numeri D', E. Per conseguenza, se D'' è il massimo comun divisore di questi due ultimi numeri, D'' è anche il massimo comun divisore dei numeri primitivi A, B, C, E.

127. Da ciò si ricava la regola seguente:

Per trovare il massimo comun divisore di più numeri dati bisogna primieramente cercare il massimo comun divisore di due di questi numeri, poi il massimo comun divisore di questo massimo comun divisore e di uno dei numeri rimasti, e così di seguito; l'ultimo massimo comun divisore così ottenuto, è quello dei numeri proposti.

Applicando questa regola ai quattro numeri 840, 504, 756 e 1638, si troverà 168 pel massimo comun divisore di 840 e 504; 84, pel massimo comun divisore di 756 e 168; e 42, pel massimo comun divisore di 1638 e 84; dunque 42 è il massimo comun divisore dei numeri proposti.

Ecco il prospetto dei calcoli:

1.°	840	504	336	168	0
		1	1	2	
2.°	756	168	84	0	
		4	2		
3.°	1638 798	84	42	0	
		19	2		

128. Il principio del n° 123, relativo al massimo comun divisore di due numeri, è applicabile al massimo comun divisore di più numeri; così *qualunque divisore comune a più numeri, divide il loro massimo comun divisore*; e reciprocamente.

129. Teorema 4°. *Moltiplicando due o più numeri per uno stesso numero, il loro massimo comun divisore resta moltiplicato per questo numero.*

Consideriamo i due numeri 36 e 15. Effettuando sopra

questi numeri le operazioni per la ricerca del massimo comun divisore, si trovano le seguenti uguaglianze:

$$36 = 15 \times 2 + 6$$
$$15 = 6 \times 2 + 3$$
$$6 = 3 \times 2.$$

Il massimo comun divisore è dunque 3.

Bisogna provare che moltiplicando 36 e 15 per un numero qualunque, per esempio, per 7, il massimo comun divisore dei numeri 36×7 e 15×7 sarà 3×7.

Sappiamo (vedi n° 82) che se si moltiplica il dividendo e il divisore di una divisione per uno stesso numero, il resto è moltiplicato per questo numero. Ciò posto, se si moltiplicano i due numeri 36 e 15 per 7, il resto 6 della divisione sarà moltiplicato per 7; ora il 15 e il 6 essendo moltiplicati per 7, anche il resto 3 dalla loro divisione resulterà moltiplicato per 7. Ma 3 è il massimo comun divisore di 36 e 15; dunque 3×7 sarà il massimo comun divisore di 36×7 e 15×7, come bisognava dimostrare.

Il ragionamento essendo evidentemente generale, può estendersi con facilità anche a più numeri.

130. Corollario 1.° Inversamente, *se si dividono due o più numeri per uno stesso numero, il loro massimo comun divisore è diviso per questo numero.*

In virtù di questo teorema può, in molti casi, semplicizzarsi la ricerca del massimo comun divisore.

Così, supponiamo di dover cercare il massimo comun divisore di 7200 e 320; dividendo per 10 questi due numeri si ha 720 e 32, il cui massimo comun divisore è 16. Ora, avendo diviso i due numeri 7200 e 320 per 10, il resto 16 della loro divisione è diviso per 10; per conseguenza, il massimo comun divisore dei due numeri 7200 e 320 è 160.

131. Corollario 2.° *Dividendo due o più numeri pel loro massimo comun divisore, il massimo comun divisore è diviso per sè stesso, e diviene l'unità.*

ESERCIZI

Sulla ricerca del Massimo comun divisore.

XXXIX. Trovare il massimo comun divisore dei numeri:

(777 e 148); (768 e 138); (1212 e 108); (5300 e 200); (560, 348, 112); (5600, 800, 420, 60),

e cercare quante volte il massimo comun divisore trovato è contenuto nei numeri stessi e nei resti successivi, (vedi n.° 124).

NUMERI PRIMI.

132. Si dice che un numero è *primo*, quando non ammette altri divisori interi che sè stesso e l'unità: così i numeri 1, 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, ec. son primi. — Due numeri si dicono *primi fra loro*, quando non hanno altro divisor comune che l'unità: così i numeri 8 e 15, 9 e 14, 10 e 21, sono primi fra loro. Due numeri possono essere primi fra loro senza essere perciò numeri primi; così 24 e 35 non hanno alcun divisore comune, ma ciascuno di essi, preso separatamente, ammette dei divisori.

Formare una tavola di numeri primi.

133. Per formare una tavola di numeri primi, si scrivono i numeri 1 e 2, e dopo di essi tutti i numeri impari per ordine di grandezza, come qui si vede:

1 2 3 5 7 9 11 13 15 17 19 21
23 25 27 29 31 33 35 37 39 41 43 45
47 49 51 53 55 57 59 61 63 65 67 69
71 73 75 77 79 81 83 85 87 89 91 93
95 97 99 ec.

I numeri divisibili per 3, eccettuato 3, non son primi dunque contrassegneremo con un punto in alto, partendo dal 3 esclusivamente, tutti i numeri di tre in tre; è chiaro che così segneremo tutti i multipli di 3.

I numeri divisibili per 5 non son primi; quindi, partendo dal 5 esclusivamente, contrassegneremo tutti i numeri di 5 in 5, ossia i multipli di 5.

Ora segneremo con un punto i numeri di 7 in 7, cominciando del 7 esclusivamente, cioè contrassegneremo tutti i multipli di 7, e così di seguito.

I numeri della serie i quali così operando, non saranno stati contrassegnati, saranno primi.

Questo metodo porta il nome di *Vaglio d'Eratostene,* dal nome del suo inventore.

La serie dei numeri primi è illimitata come quella dei numeri naturali: crediamo utile di riportare quì la seguente.

Tavola dei trecento più piccoli numeri primi.

1	113	281	463	659	863	1069	1291	1511	1733
2	127	283	467	661	877	1087	1297	1523	1741
3	131	293	479	673	881	1091	1301	1531	1747
5	137	307	487	677	883	1093	1303	1543	1753
7	139	311	491	683	887	1097	1307	1549	1759
11	149	313	499	691	907	1103	1319	1553	1777
13	151	317	503	701	911	1109	1321	1559	1783
17	157	331	509	709	919	1117	1327	1567	1787
19	163	337	521	719	929	1123	1361	1571	1789
23	167	347	523	727	937	1129	1367	1579	1801
29	173	349	541	733	941	1151	1373	1583	1811
31	179	353	547	739	947	1153	1381	1597	1823
37	181	359	557	743	953	1163	1399	1601	1831
41	191	367	563	751	967	1171	1409	1607	1847
43	193	373	569	757	971	1181	1423	1609	1861
47	197	379	571	761	977	1187	1427	1613	1867
53	199	383	577	769	983	1193	1429	1619	1871
59	211	389	587	773	991	1201	1433	1621	1873
61	223	397	593	787	997	1213	1439	1627	1877
67	227	401	599	797	1009	1217	1447	1637	1879
71	229	409	601	809	1013	1223	1451	1657	1889
73	233	419	607	811	1019	1229	1453	1663	1901
79	239	421	613	821	1021	1231	1459	1667	1907
83	241	431	617	823	1031	1237	1471	1669	1913
89	251	433	619	827	1033	1249	1481	1693	1931
97	257	439	631	829	1039	1259	1483	1697	1933
101	263	443	641	839	1049	1277	1487	1699	1949
103	269	449	643	853	1051	1279	1489	1709	1951
107	271	457	647	857	1061	1283	1493	1721	1973
109	277	461	653	859	1063	1289	1499	1723	1979

Teoremi relativi ai numeri primi.

134. Teorema 1°. *Un numero intero che non è primo, ammette sempre un divisore primo.*

Sia N un numero non primo: è chiaro che esso ammette un divisore d più grande di 1, e più piccolo di N. Se questo divisore d è primo, il teorema è dimostrato. Se d non è primo,

ammette un divisore d più grande di 1 e più piccolo di d. Se d' è primo, il teorema è dimostrato, perchè d' dividendo d, divide N che è un multiplo di d (ved. n.° 105). Se d' non è primo, si ripeterà lo stesso ragionamento; e così di seguito.

Ora, i divisori interi $d, d' \ldots .$, essendo maggiori di 1, e andando tutti decrescendo, sono in numero limitato, e l'ultimo di essi è necessariamente primo; dunque il numero N, non primo, ammette un divisore primo.

135. Corollario. — Poichè un numero primo è divisore di sè stesso, è chiaro che ammette un divisore primo: quindi il teorema precedente può modificarsi così: *qualunque numero, primo o no, ammette sempre un divisore primo.*

136. Teorema 2.° *Se due numeri non sono primi fra loro, essi hanno almeno un divisore primo comune.*

Infatti, se due numeri non sono primi fra loro, per definizione hanno un divisore che li divide ambedue; questo divisore pel teorema 1°. ammette pure un divisore primo, il quale divide evidentemente i due numeri dati, essendo essi multipli del primo divisore.

Esempio. — Sieno i due numeri 12 e 18 non primi fra loro. Essi ammettono per divisor comune 6: ma 6 ammette un divisore primo 3, il quale divide evidentemente i due numeri 12 e 18.

137. Teorema 3°. *Un numero che divide un prodotto di due fattori ed è primo con uno di questi fattori, divide necessariamente l'altro.*

Se 8 è un numero primo con 21, e divide il prodotto 21×16, bisogna provare che 8 divide il fattore 16.

I numeri 21 e 8 essendo per ipotesi primi fra loro, hanno per massimo comun divisore l'unità; per conseguenza, se si moltiplicano questi due numeri per 16, il massimo comun divisore di 21×16 e di 8×16, sarà 16 (vedi n.° 129).

Ora, 8 divide evidentemente 8×16; divide anche, per ipotesi, 21×16, dunque divide il massimo comun divisore 16 di questi due numeri (vedi n.° 123). Ciò che bisognava dimostrare.

138. Corollario 1°. — *Qualunque numero primo che divide un prodotto di più fattori divide almeno uno di questi fattori.*

Consideriamo un prodotto $A \times B \times C$ divisibile per un numero primo P. Questo prodotto può considerarsi come compo-

sto di due fattori $(A \times B) \times C$. Se il numero primo P non divide il fattore C, è primo con questo fattore; quindi, dividendo il prodotto $(A \times B) \times C$, divide l'altro fattore $(A \times B)$, e per conseguenza divide A o B, e ciò pel teorema 3.°

139. Corollario 2.° *Qualunqe numero primo che divide un prodotto di fattori primi, è necessariamente uguale a uno di essi.*

Perchè, dividendo il prodotto, deve dividere uno dei fattori primi di questo prodotto; il che non può aver luogo se esso non è uguale a questo fattore.

140. Corollario 3°. — *Qualunque numero primo che divide una potenza di un numero, deve dividere questo numero.*

Sia P un numero primo che divide la potenza A^m; io dico che P divide A.

Infatti, essendo $A^m = A \times A \times A \ldots$, il numero P divide un prodotto di più fattori uguali ad A; dunque deve dividere uno di essi, cioè il numero A (n.° 105).

141. Corollario 4.° — *Se due numeri sono primi fra loro, anche le loro potenze sono prime fra loro.*

Sieno A e B due numeri primi fra loro; le potenze A^m e B^p saranno prime fra loro.

Infatti, se A^m e B^p ammettessero uno stesso divisore primo P, anche A e B ammetterebbero questo stesso divisore (n.° 140), e allora non sarebbero primi fra loro, il che è contrario all'ipotesi.

142. Teorema 4°. — *Qualunque numero, primo coi fattori d'un prodotto, è primo con questo prodotto.*

Sia N un numero primo coi fattori A, B, C, del prodotto $A \times B \times C$; si vuol provare che N è primo con questo prodotto.

Se il numero N e il prodotto $A \times B \times C$ non fossero primi fra loro, avrebbero un divisore primo comune, che chiameremo P; per conseguenza il numero P, dividendo il prodotto $A \times B \times C$, dividerebbe almeno uno di questi fattori (n.° 138) per esempio A; ma allora N ed A avrebbero un divisore comune P, ciò che è contrario all'ipotesi.

Reciprocamente, *qualunque numero, primo con un prodotto, è primo coi fattori di questo prodotto.*

Sia N un numero primo col prodotto $A \times B \times C$; si vuol provare che N è primo con ciascuno dei fattori A, B, C.

Se il numero N e uno dei fattori, per esempio A, non

fossero primi fra loro, avrebbero un divisore comune P; per conseguenza il numero P, dividendo A, dividerebbe il prodotto $A \times B \times C$ che è un multiplo di A; ma allora il numero N e il prodotto $A \times B \times C$ avrebbero un divisore comune P, il che è contrario all'ipotesi.

143. Teorema 5.° — *Qualunque numero divisibile per più altri primi fra loro due a due, è divisibile pel loro prodotto.*

Sia N un numero divisibile per più altri A, B, C, primi fra loro due a due; io dico che N è divisibile per $A \times B \times C$.

Infatti, essendo N divisibile per A, chiamando q il quoziente della loro divisione, si ha l'uguaglianza:

$$N = A \times q.$$

Ora, il prodotto $A \times q$ essendo uguale ad N, è divisibile per B; ma B è primo con A; dunque q è divisibile per B (n°. 137). Sia q' il quoziente, avremo:

$$q = B \times q'.$$

Sostituendo nell'uguaglianza precedente a q questo suo valore, essa diviene

$$N = A \times B \times q'.$$

Il prodotto $A \times B \times q'$, essendo uguale a N, è divisibile per C; ma C è primo con A e con B, e, per conseguenza, col loro prodotto $A \times B$ (n.° 142); dunque q' è divisibile per C. Indicando con q'' il quoziente, si ha:

$$q' = C \times q''.$$

Sostituendo nell'uguaglianza precedente a q' questo suo valore essa diviene

$$N = A \times B \times C \times q''.$$

Resulta ad evidenza da quest'ultima uguaglianza che il numero N è divisibile pel prodotto $A \times B \times C$, come si doveva dimostrare.

Esempio: 120 è divisibile per 3, per 4, e per 5, che son primi fra loro due a due; dunque per la dimostrazione prece-

dente, 120 è divisibile per $3 \times 4 = 12$; per $3 \times 5 = 15$; per $4 \times 5 = 20$; per $3 \times 4 \times 5 = 60$.

144. Corollario. — Da questo teorema e da altri dimostrati più sopra, si deducono le condizioni di divisibilità per 6, per 15, per 18, per 45, per 22, per 55, per 99, per 66, ec.— Infatti, affinchè un numero sia divisibile per 6, è necessario e sufficiente che sia divisibile per 2 e per 3, perchè $6 = 2 \times 3$; affinchè un numero sia divisibile per 18, è necessario e sufficiente che sia divisibile per 2 e per 9, perchè $18 = 2 \times 9$. Così un numero sarà divisibile per 55, se si verificheranno le condizioni di divisibilità per 5 e per 11, essendo $55 = 5 \times 11$ ec.

Decomposizione d'un numero in fattori primi.

145. Teorema 1°. — *Qualunque numero non primo può decomporsi in un prodotto di fattori primi.*

Abbiasi, per esempio, il numero 105, che non è primo: il più piccolo de' suoi divisori è un numero primo. (n.° 134).

Sia 3 questo divisore; avremo l' uguaglianza:

$$105 = 3 \times 35.$$

Se 35 fosse primo, il teorema sarebbe dimostrato, perchè allora il numero 105 sarebbe uguale al prodotto di due fattori primi. Ora 35 non è primo, ma il più piccolo dei suoi divisori è primo. Sia 5 questo divisore; avremo l' uguaglianza:

$$35 = 5 \times 7.$$

Sostituendo questi due fattori al loro prodotto 35 nell'uguaglianza precedente, si otterrà:

$$105 = 3 \times 5 \times 7.$$

Ora il fattore 7 è un numero primo; dunque la decomposizione del numero 105 in fattori primi è effettuata.

146. Dal teorema precedente si deduce che: *Per decomporre un numero in fattori primi, si divide prima per 2 quante volte si può, se esso è divisibile per 2; poi si divide il resultato per 3, quante volte si può, se è divisibile per 3; poi il nuovo resultato per 5, e così*

di seguito per 7, per 11, ec., sino a che si giunga ad avere un quoziente primo,

Esempio. Sia il numero 360.

L'operazione, in pratica, si dispone come segue:

OPERAZIONE | SPIEGAZIONE

360	2
180	2
90	2
45	3
15	3
5	5

Il numero 360, essendo pari, è divisibile per 2; scritto il 2 a destra della linea, si pone sotto al 360 il quoziente 180. Il 180 è esso pure divisibile per 2, e dà di quoziente 90; scrivesi il 2 a destra e il 90 sotto a 180. Il numero 90, diviso per 2, dà di quoziente 45. Questo numero, essendo impari, non è divisibile per 2, ma per 3. Dividendo per 3, si ha di quoziente 15, che, diviso parimente per 3, dà di quoziente 5. Questo numero essendo primo, l'operazione è finita. — Si conchiude adunque che 360 contiene il 2 preso tre volte come fattore, cioè 2^3; il 3 preso due volte come fattore, cioè 3^2, e il 5 preso una sola volta; e si ha l'uguaglianza:

$$360 = 2^3 \times 2^2 \times 5.$$

Si troverà al modo stesso che

$$2310 = 2 \times 3 \times 5 \times 7 \times 11;$$

e

$$252 = 2^2 \times 3^2 \times 7.$$

147. TEOREMA 2.° — *Un numero non può decomporsi in fattori primi che in una sola maniera.*

Infatti, se due prodotti di fattori primi sono uguali, essi si compongono degli stessi fattori elevati ciascuno alla stessa potenza.

Ricerca di tutti i divisori d'un numero.

148 TEOREMA. — *Affinchè due numeri sieno divisibili esattamente l'uno per l'altro, è necessario e sufficiente che il dividendo contenga i fattori primi del divisore, ciascuno con un esponente almeno eguale a quello che ha nel divisore.*

Questa condizione è *necessaria*; perchè se il dividendo è divisibile pel divisore, sarà eguale al prodotto del divisore pel quoziente; per conseguenza, sarà uguale al prodotto dei fattori primi del divisore per i fattori primi del quoziente.

Questa condizione è *sufficiente*; perchè, essendo sodisfatta, il dividendo può essere decomposto in un prodotto di due fattori, di cui l'uno contenga tutti i fattori primi del divisore e l'altro i fattori che restano.

Così, i fattori primi di 630, per esempio, essendo 2, 3^2, 5, 7, e quelli di 45 essendo 3^2, 5, il numero 630 sarà esattamente divisibile per 45.

E per eseguire questa divisione, basterà sopprimere nel dividendo i fattori 3^2, 5, comuni al divisore; il prodotto degli altri fattori, $2 \times 7 = 14$, formerà il quoziente.

Se si avessero i numeri 27 e 36, questi non sarebbero divisibili l' uno per l'altro, perchè $27 = 3^3$, e $36 = 2^2 \times 3^2$; dal che si vede che il 3 entra tre volte in 27, e due sole volte in 36.

149. Debbansi ora trovare tutti i divisori di un numero, per esempio, di 360.

Decomponendo questo numero nei suoi fattori primi, avremo: (vedi n.° 146)

$$360 = 2^3 \times 3^2 \times 5.$$

Ciò fatto, oserveremo: 1.° che il numero dato 360 è divisibile per ciascuno dei numeri che formano le tre linee orizzontali del quadro seguente:

$$\begin{array}{llll} 1, & 2, & 2^2, & 2^3; \\ 1, & 3, & 3^2; & \\ 1, & 5; & & \end{array}$$

perchè ciascuno di questi numeri sodisfa alla condizione del n.° 148.

2.° I numeri di ciascuna linea orizzontale essendo primi con quelli delle due altre, 360 è anche divisibile pei prodotti due a due, tre a tre di questi stessi numeri presi in linee differenti (n.° 143 e 148).

Si troveranno dunque tutti i divisori di 360 moltiplicando successivamente tutti i numeri della prima linea per quelli della seconda; poi tutti i termini del prodotto ottenuto per quelli della terza linea; gli ultimi prodotti trovati sono i divisori richiesti.

In pratica si opera secondo la regola seguente:

Dopo aver decomposto il numero in fattori primi si prende il divisore che ha il più alto esponente, e si scrivono le sue diverse potenze sopra una linea orizzontale cominciando coll' unità; indi si moltiplicano tutti i numeri di questa linea per le diverse potenze del fattore seguente, e così di seguito, continuando a moltiplicare tutti i numeri di ciascuna delle linee ottenute pei fattori primi successivi e per le le loro potenze.

Ecco il modo di disporre l' operazione.

Fattori primi		Quadro di tutti i divisori			
360	2	1,	2,	4,	8,
180	2	3,	6,	12,	24,
90	2	9,	18,	36,	72,
45	3	5,	10,	20,	40,
15	3	15,	30,	60,	120,
5	5	45,	90,	180,	360.

Spiegazione.

Il fattore 2 entrando alla più alta potenza nell'espressione $360 = 2^3 \times 3^2 \times 5$, si scrivono le sue tre diverse potenze nella prima linea orizzontale cominciando coll' unità, e si ha così

$$1,\ 2,\ 4,\ 8.$$

Indi si moltiplicano i numeri di questa prima linea pel fattore 3, con che si ottiene la seconda linea

$$3,\ 6,\ 12,\ 24;$$

e poichè 3 entra al quadrato nel numero proposto 360, bisognerebbe moltiplicare ancora una volta per 3 ciascuno dei numeri delle due linee ottenute; ma, il prodotto della prima linea per 3 essendo stato fatto una volta, è sufficiente moltiplicare per 3 i numeri della seconda linea per formare la terza

$$9,\ 18,\ 36,\ 72.$$

Passando al fattore primo 5, che è alla prima potenza, si moltiplicano per esso i numeri delle tre linee ottenute; e si hanno

così le tre linee successive che completano il quadro dei divisori di 360. Da ciò si deduce che il numero 360 contiene 24 divisori compresovi il 360 stesso e l'unità.

Altro esempio. — Abbiasi il numero 3276, di cui si vogliono tutti i divisori.

Fattori primi		Quadro di tutti i divisori		
3276	2	1,	2,	4,
1638	2	3,	6,	12,
819	3	9,	18,	36,
273	3	7,	14,	28,
91	7	21,	42,	84,
13	13	63,	126,	252,
		13,	26,	52,
		39,	78,	156,
		117,	234,	468,
		91,	182,	364,
		273,	546,	1092,
		819,	1638,	3276.

150. *Il numero totale dei divisori di un numero proposto è dato dal prodotto degli esponenti dei fattori primi del numero stesso. aumentati ciascuno di un' unità.*

Infatti, abbiasi il numero 360, che decomposto in fattori primi, è uguale a $2^3 \times 3^2 \times 5$.

Se, conformemente a ciò che abbiamo detto al n.° 149, si forma la tavola:

$$\begin{array}{llll} 1, & 2, & 2^2, & 2^3; \\ 1, & 3, & 3^2; & \\ 1, & 5; & & \end{array}$$

la prima linea conterrà $3 + 1$ termini, la seconda $2 + 1$ termini, e la terza $1 + 1$.

Quindi moltiplicando i termini della prima linea per quelli della seconda, avremo in tutto $(3 + 1) \times (2 + 1) = 12$ prodotti; ciascuno di questi prodotti moltiplicato per i termini

7

della terza linea, produrrà $1 + 1$ prodotti; il loro numero sarà dunque moltiplicato per $1 + 1$, ossia per 2, e diverrà:

$$(3 + 1) \times (2 + 1) \times (1 + 1)$$

ovvero
$$4 \times 3 \times 2 = 24,$$

che è il numero totale dei divisori di 360, come già si è trovato.

Così, per avere il numero totale dei divisori del numero 3276, che è uguale a $2^2 \times 3^2 \times 7 \times 13$, basterà aggiungere un' unità a ciascuno degli esponenti di questi fattori e farne il prodotto, che sarà $3 \times 3 \times 2 \times 2 = 36$; e tanti sono appunto i divisori di 3276 (1).

Applicazione della decomposizione dei numeri in fattori primi alla ricerca del massimo comun divisore, e del minimo multiplo comune di due o più numeri dati.

151. *Per trovare il massimo comun divisore di due o più numeri dati, si decompongono questi numeri nei loro fattori primi; indi si forma il prodotto dei fattori primi* comuni, *prendendo ciascuno di questi fattori col* più piccolo esponente *che ha nei numeri proposti.*

Esempio. — Debbasi trovare il massimo comun divisore dei numeri 24, 36 e 168. Decomponendo questi numeri nei loro fattori primi, si ha:

$$24 = 2^3 \times 3;\ 36 = 2^2 \times 3^2;\ 168 = 2^3 \times 3 \times 7.$$

I fattori primi comuni sono 2^2 e 3, e il loro prodotto $2^2 \times 3 = 12$, è il massimo comun divisore dei numeri dati.

Infatti, è *comune*, perchè non contiene che fattori comuni ai tre numeri 24, 36, 168; ed è il *massimo*, perchè contiene tutti i loro fattori comuni.

Altro esempio. — Sieno i numeri 520, 712, 680, 120.

Si ha: $520 = 2^3 \times 5 \times 13;\ 712 = 2^3 \times 89;$

$$680 = 2^3 \times 5 \times 17;\ 120 = 2^3 \times 3 \times 5.$$

(1) Sottintendesi l' esponente 1 al numero privo di esponente: così $5 = 5^1$; $13 = 13^1$.

Di fattori primi comuni, non vi è che $2^3 = 8$, che è il loro massimo comun divisore.

Questo *metodo* per ottenere il massimo comun divisore si dice *per decomposizione in fattori primi*, e quello esposto al n.° 122 e seguenti si dice *per divisioni successive*.

152. *Per trovare il minimo multiplo comune a più numeri, si decompongono questi numeri nei loro fattori primi; indi si forma il prodotto di tutti i loro fattori primi* differenti, *prendendo ciascuno di essi* col più alto esponente, *col quale figura nei numeri proposti.*

Esempio. — Sieno i numeri 8, 12, 21, 63.

Decomponendoli nei loro fattori primi, si ha:

$$8 = 2^3;\ 12 = 2^2 \times 3;\ 21 = 3 \times 7;\ 63 = 3^2 \times 7.$$

I fattori primi differenti, ciascuno col più alto esponente, sono 2^3, 3^2, 7; e il loro prodotto $2^3 \times 3^2 \times 7 = 504$, è il minimo multiplo, o *minimo numero divisibile*, richiesto.

Infatti, è *divisibile* per ciascuno dei numeri dati, perchè racchiude tutti i loro fattori primi; ed è il *minimo*, perchè deve contenere ciascun fattore primo, elevato ad una potenza eguale almeno a quella alla quale trovasi inalzato nei numeri dati (vedi n°. 148).

153. Se i numeri dati sono primi fra loro, è chiaro che il minimo multiplo comune sarà dato dal prodotto di questi stessi numeri.

Altro metodo per trovare il minimo multiplo.

154. Sia proposto di trovare il minimo multiplo dei numeri 8, 12, 21, 63.

Cerchiamo il minimo multiplo comune a due dei numeri dati, per esempio, a 8 e 12.

Per trovarlo, si cerchi il loro massimo comun divisore, che sarà 4. Ciò fatto, si divida l'uno dei due numeri, per esempio 8, per questo massimo comun divisore 4; il quoziente 2 racchiude tutti i fattori del numero 8 che non entrano nel numero 12; si moltiplichi questo numero pel quoziente 2, e il prodotto $12 \times 2 = 24$ è il minimo multiplo di 8 e di 12, perchè contiene *tutti* i fattori primi differenti di questi due numeri e *non altri.*

Trovato il minimo multiplo 24 dei due numeri 8 e 12, si determina nello stesso modo il minimo multiplo di 24 e del terzo numero dato 21; si trova che questo minimo multiplo è

$$\frac{24 \times 21}{3} = 24 \times 7 = 168.$$

Finalmente, applicando lo stesso metodo ai numeri 168 e al quarto 63, si troverà:

$$\frac{168 \times 63}{21} = 168 \times 3 = 504,$$

il quale è il minimo multiplo comune, o minimo divisibile richiesto.

Infatti, contiene *tutti* i fattori differenti dei numeri dati e *non altri.*

155. Da questo esempio si vede che *il minimo multiplo comune a più numeri dati è lo stesso di quello comune a due fra essi ad ai numeri dati rimanenti.*

Così, se A, B, C . . . . sono i numeri proposti, chiamando M il minimo multiplo comune ad A e a B, il minimo multiplo comune ai tre numeri dati sarà uguale a quello di M e C.

Quindi la ricerca del minimo multiplo o minimo divisibile di più numeri, si riduce sempre a quella di due soli fra essi. Se dunque si rappresentano i due numeri colle lettere A e B, e con D il loro massimo comun divisore, il minimo multiplo o minimo divisibile, sarà dato dall'espressione:

$$\frac{A \times B}{D}.$$

Esempio. — Proponiamoci di cercare il minimo multiplo dei numeri 40, 100, 140.

Applicando la formula ai primi due numeri 40 e 100, il cui massimo comun divisore è 20, si avrà :

$$\frac{40 \times 100}{20} = 2 \times 100 = 200.$$

Quindi, servendosi della stessa formula pei numeri 200 e 140, il cui massimo comun divisore è 20, si ottiene:

$$\frac{200 \times 140}{20} = 10 \times 140 = 1400.$$

Dunque 1400 è il minimo divisibile per i numeri dati 40, 100, 140, ossia è il loro minimo multiplo.

ESERCIZI

Sulla Teoria dei Numeri primi.

XL. Quali sono le condizioni di divisibilità per 6, per 12, per 15, per 20, per 36, per 45?

XLI. Decomporre in fattori primi i numeri

1750, 14175, 3468, 89760, 190463.

XLII. Trovare tutti i divisori di 120, 1404 e 14175.

XLIII. Cercare il massimo comun divisore di 156, 650, 182, e di 340, 1360, 5440, 800.

XLIV. Trovare, nei due modi, il minimo multiplo comune dei numeri 392, 1225, 245.

XLV. Trovare un numero compreso fra 25 e 40, tale che, diviso per 2, per 3 e per 4, dia costantemente di resto 1.

XLVI. Due persone, di cui l'una ha 38 anni e l'altra 60, domandano ad una terza qual'è la sua età ; questa risponde: La mia età è compresa fra le due vostre, e se voi dividete il numero dei miei anni per 2, per 3 e per 4, troverete costantemente un resto uguale all'unità. — Qual'è l'età di questa terza persona?

TEORIA DELLE FRAZIONI.

156. Si chiama *frazione* una o più parti uguali dell' unità.

Le frazioni traggono la loro origine dalla misura diretta delle quantità e dalle divisioni che non si fanno esattamente; le parti di cui esse si compongono son dette *parti aliquote* dell'unità.

157. Per rappresentare una frazione sono necessari due numeri: l' uno che indica in quante parti eguali l'unità è stata divisa, e questo numero chiamasi *denominatore;* l'altro per indicare quante di queste parti si son prese, e chiamasi *numeratore.* Si separano questi due numeri per mezzo d'una linea orizzontale, scrivendo il numeratore al di sopra e il denominatore al disotto,

Per leggere una frazione scritta, si enuncia prima il numeratore, poi il denominatore, dando a questo la terminazione in *esimo*.

Così, se l'unità è stata divisa in 14 parti, la riunione di 5 di queste parti, si rappresenterà con $\frac{5}{14}$, che si legge *cinque quattordicesimi*.

Vi ha eccezione pei denominatori 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, pei quali si dice *mezzo, terzo, quarto, quinto, sesto, settimo, ottavo, nono, decimo*.

Così $\frac{3}{4}$, si legge *tre quarti*; $\frac{7}{8}$, si pronuncia *sette ottavi*.

158. Il numeratore d'una espressione frazionaria può essere *più piccolo del denominatore, eguale al denominatore* o *più grande del denominatore*.

Nel primo caso si ha una frazione propriamente detta, cioè un numero minore dell'unità, come $\frac{2}{3}$, $\frac{8}{9}$, $\frac{1}{5}$.

Nel secondo caso l'espressione è evidentemente uguale all'unità, come $\frac{2}{2}$, $\frac{3}{3}$, $\frac{8}{8}$, che sono tutte uguali a 1.

Nel terzo caso l'espressione prende il nome di *numero frazionario*, che è più grande dell' unità, e, in generale, è uguale a un numero intero più una frazione; come $\frac{25}{3}$, $\frac{3}{2}$, $\frac{16}{7}$.

159. *Per estrarre il numero intero contenuto in un'espressione frazionaria, si divide il numeratore pel denominatore; il quoziente trovato esprime il numero intero. Se vi è un resto, si pone sotto forma di frazione, dandogli per denominatore il denominatore stesso del numero frazionario.*

Così $$\frac{25}{3} = 8 + \frac{1}{3}$$

Infatti, essendo l'unità uguale a 3 *terzi*, il numero $\frac{25}{3}$ contiene tante volte l'unità, quante volte 3 *terzi* sono contenuti in 25 *terzi*, o quante volte 3 è contenuto in 25; vale a dire 8 volte più un *terzo*.

160. Reciprocamente, *per ridurre un numero misto in una sola*

espressione frazionaria, si moltiplica l'intero pel denominatore della frazione, si aggiunge al prodotto il numeratore, e si dà alla somma il denominatore della frazione.

Così $3 + \frac{4}{5} = \frac{3 \times 5 + 4}{5} = \frac{19}{5}$.

Infatti, essendo l'*unità* uguale a 5 *quinti*, 3 *unità* valgono 3 volte 5 *quinti* o 15 quinti; dunque 3 *unità* più 4 *quinti* valgono 15 *quinti* più 4 *quinti*, ossìa 19 *quinti*.

In generale $a + \frac{m}{n} = \frac{a \times n + m}{n}$.

Proprietà delle frazioni.

161. Teorema 1.° — *Se due frazioni hanno lo stesso denominatore, la maggiore è quella che ha il numeratore più grande; e se due frazioni hanno lo stesso numeratore, la maggiore è quella che ha il denominatore più piccolo.*

Così, delle due frazioni $\frac{2}{9}$ e $\frac{5}{9}$, la seconda è la maggiore, perchè contiene un numero più grande di *noni* dell' unità.

Delle due frazioni $\frac{7}{13}$ e $\frac{7}{5}$, la seconda è la maggiore, perchè contiene tante parti di unità quante la prima, ma le parti di cui essa e formata, sono evidentemente più grandi, giacchè $\frac{1}{5}$ è più grande di $\frac{1}{13}$.

162. Teorema 2°. — *Se si moltiplica o si divide il numeratore d'una frazione per un numero, la frazione è moltiplicata o divisa per questo numero.*

Abbiasi la frazione $\frac{3}{4}$; moltiplicando il suo numeratore per un numero qualunque, per esempio per 2, si avrà $\frac{3 \times 2}{4} = \frac{6}{4}$, che è il *doppio* della prima $\frac{3}{4}$.

Infatti la grandezza delle parti in cui l'unità è stata divisa è uguale nei due casi, ma invece di prender 3 di queste parti, se ne son prese 6, cioè un numero doppio; per conseguenza

l' espressione $\frac{6}{4}$ ha un valore doppio di $\frac{3}{4}$.

Con un ragionamento analogo si proverebbe che, dividendo il numeratore di una frazione per un numero qualunque, la frazione rimane divisa per questo numero.

Così, dividendo il numeratore dell' espressione $\frac{6}{4}$ per 2, si ottiene $\frac{3}{4}$, che è la metà di $\frac{6}{4}$.

163. TEOREMA 3°. — *Se si moltiplica o si divide il denominatore d' una frazione per un numero, la frazione è divisa o moltiplicata per questo numero.*

1°. Abbiasi la frazione $\frac{4}{5}$; moltiplicando il suo denominatore per un numero qualunque, per es. per 2, si ha $\frac{4}{5 \times 2} = \frac{4}{10}$, che è la *metà* di $\frac{4}{5}$.

Infatti, il denominatore esprime in quante parti uguali l'unità è stata divisa; ora, moltiplicando il denominatore per 2, si divide l' unità in un numero doppio di parti, le quali, per conseguenza, divengono 2 volte più piccole; e poichè se ne prende sempre lo stesso numero, la frazione diviene 2 volte più piccola, ossia la metà. Dunque $\frac{4}{10}$ è la metà di $\frac{4}{5}$.

2°. Abbiasi ora la frazione $\frac{4}{10}$; dividendo il suo denominatore per 2, si ottiene $\frac{4}{10:2} = \frac{4}{5}$, che è 2 *volte più grande* di $\frac{4}{10}$.

Infatti se dopo aver diviso l' unità in 10 parti uguali, di ogni 2 parti ne facciamo una sola, ciascuna parte sarà doppia della prima; dunque $\frac{1}{5}$, ossia la riunione di 2 parti, sarà il doppio di $\frac{1}{10}$; e, per conseguenza, $\frac{4}{5}$ sarà 2 volte più grande di $\frac{4}{10}$.

164. Corollario. — Dai teoremi 2° e 3° si deduce:

1°. Che per moltiplicare una frazione per 2, 3, 4, 5. . . . ec., si può *moltiplicare il suo numeratore*, oppure, *dividere il suo denominatore*, per 2, 3, 4, 5. . . . ec. Il primo metodo si può sempre applicare, ma il secondo esige che il denominatore della frazione proposta sia esattamente divisibile per 2, 3, 4, 5. . . . ec.

Esempio: $\frac{7}{8} \times 4 = \frac{7 \times 4}{8} = \frac{28}{8}$;

oppure: $\frac{7}{8} \times 4 = \frac{7}{8 : 4} = \frac{7}{2}$, che, come vedremo più sotto (n°. 165), è uguale a $\frac{28}{8}$.

In generale: $\frac{a}{b} \times m = \frac{a \times m}{b} = \frac{a}{b : m}$.

2°. Che per dividere una frazione per 2, 3, 4, 5. . . . . ec., si può *moltiplicare il suo denominatore*, oppure, *dividere il suo numeratore* per 2, 3, 4, 5. . . . ec. Il primo metodo può sempre applicarsi; il secondo esige che il numeratore sia divisibile per 2, 3, 4, 5. . . . ec.

Esempio: $\frac{8}{9} : 4 = \frac{8}{9 \times 4} = \frac{8}{36}$;

oppure: $\frac{8}{9} : 4 = \frac{8 : 4}{9} = \frac{2}{9}$, che è uguale a $\frac{8}{36}$ (n°. 165).

In generale: $\frac{a}{b} : m = \frac{a}{b \times m} = \frac{a : m}{b}$.

165. Teorema 4°. — *Non si cangia il valore d'una frazione, moltiplicando o dividendo i suoi due termini per uno stesso numero.*

Abbiasi la frazione $\frac{2}{9}$; bisogna provare che moltiplicando il suo numeratore e il suo denominatore per un numero qualunque, per esempio per 4, essa non cangia di valore.

Infatti, se si moltiplica il numeratore per 4, si ha:

$$\frac{2 \times 4}{9} = \frac{8}{9},$$

frazione 4 *volte più grande* della prima (n°. 162); se si moltiplica il denominatare di quest'ultima per lo stesso numero 4, si ottiene: $\frac{8}{9 \times 4} = \frac{8}{36}$, che è 4 *volte più piccola* di $\frac{8}{9}$ (n°. 163).

Ora, poichè $\frac{8}{9}$ è *quattro volte più grande* di $\frac{2}{9}$, e $\frac{8}{36}$ è *quattro volte più piccola* di $\frac{8}{9}$, è chiaro che $\frac{8}{36}$ è uguale a $\frac{2}{9}$, come bisognava dimostrare.

Al modo stesso si proverebbe la seconda parte del teorema.

Così: $$\frac{28}{8} = \frac{28 : 4}{8 : 4} = \frac{7}{2}.$$

In generale $$\frac{a}{b} = \frac{a \times m}{b \times m} = \frac{a : m}{b : m}.$$

Riduzione delle frazioni alla più semplice espressione.

166. Una frazione è tanto più *semplice* quanto *più piccoli* sono i suoi termini.

Una frazione è detta *irriducibile* quando non può essere espressa in termini minori.

Ridurre una frazione alla sua più semplice espressione, o *ai minimi termini*, significa trovare una frazione *irriducibile*, la quale abbia lo stesso valore.

167. Per ridurre una frazione alla sua più semplice espressione, si prova se i suoi due termini sono divisibili per 2, 3, 4, 5 ec. (n°. 110 ec.) e allora ci serviamo di questa divisione per semplicizzarla, sino a che i suoi due termini siano primi fra loro; come $\frac{8}{12} = \frac{2}{3}$, perchè i due termini 8 e 12 sono esattamente divisibili per 4.

Se i due termini della frazione sono espressi da molte cifre, bisogna ricorrere alla ricerca del massimo comun divisore (n. 122 e 151). — Esempio. — Sia da ridurre alla sua più semplice espressione la frazione $\frac{612}{720}$.

Cerchiamo il massimo comune divisore di 720 e 612, e vediamo quante volte questo massimo comun divisore è contenuto nei due termini della frazione (vedi n°. 122).

OPERAZIONE.

720	612	108	72	36	0
	1	5	1	2	
20	17	3	2	1	

Trovato il massimo comun divisore 36, e risalendo ai quozienti, secondo la regola del n.° 124, si trova che esso è contenuto 17 volte in 612 e 20 volte in 720. Dunque la frazione proposta $\frac{612}{720}$ è uguale a $\frac{17}{20}$; e questa è la forma *più semplice* che possa prendere. — Infatti, non può esservi un numero maggiore di 36 che divida in un tempo 612 e 720; dunque la frazione $\frac{17}{20}$, è *irriducibile,* vale a dire, non può esprimersi in termini minori.

Al modo stesso si troverà che $\frac{1008}{1512} = \frac{2}{3}$.

168. Dal teorema 4.° resulta che *per formare tutte le frazioni uguali ad una frazione data, basta ridurla alla più semplice espressione, e moltiplicare i suoi due termini per* 2, 3, 4, 5... ec.

Esempio. — Per formare tutte le frazioni uguali alla frazione $\frac{1008}{1512}$, si riduce alla sua più semplice espressione $\frac{2}{3}$, e si moltiplicano i due termini di questa per 2, 3, 4, 5....; con che si ottengono le frazioni uguali:

$$\frac{2}{3} = \frac{4}{6} = \frac{6}{9} = \frac{8}{12} = \frac{10}{15} = \frac{12}{18} \text{ ec.}$$

Riduzione delle frazioni allo stesso denominatore.

169. *Ridurre due o più frazioni allo stesso denominatore,* significa trovare altrettante frazioni uguali in valore alle prime, e che abbiano lo stesso denominatore.

170. Se le frazioni sono due, per ridurle allo stesso denominatore basta *moltiplicare ciascuno dei due termini della prima pel denominatore della seconda; e ciascuno dei due termini della seconda pel denominatore della prima.*

Esempio. — Sieno le due frazioni $\frac{9}{11}$ e $\frac{6}{7}$.

Applicando la regola, esse divengono respettivamente

$$\frac{9 \times 7}{11 \times 7} \quad \text{e} \quad \frac{6 \times 11}{7 \times 11};$$

ed effettuando le moltiplicazioni indicate, si ha:

$$\frac{63}{77} \quad \text{e} \quad \frac{66}{77}.$$

Questa regola risulta evidentemente dal teorema del n.° 165, cioè che non si altera il valore di una frazione moltiplicando i suoi due termini per uno stesso numero.

Se le frazioni sono più di due, per ridurle allo stesso denominatore, basterà *moltiplicare i due termini di ciascuna di esse pel prodotto dei denominatori delle altre frazioni.*

Esempio. — Sieno le frazioni

$$\frac{3}{4}, \quad \frac{7}{9}, \quad \frac{2}{5}, \quad \frac{6}{11}.$$

Applicando la regola, esse divengono respettivamente

$$\frac{3 \times 9 \times 5 \times 11}{4 \times 9 \times 5 \times 11}, \quad \frac{7 \times 4 \times 5 \times 11}{9 \times 4 \times 5 \times 11},$$

$$\frac{2 \times 4 \times 9 \times 11}{5 \times 4 \times 9 \times 11}, \quad \frac{6 \times 4 \times 9 \times 5}{11 \times 4 \times 9 \times 5};$$

ovvero, effettuando i calcoli,

$$\frac{1485}{1980}, \quad \frac{1540}{1980}, \quad \frac{792}{1980}, \quad \frac{1080}{1980}.$$

Queste quattro frazioni sono uguali alle proposte, perchè non abbiamo fatto altro che moltiplicare i due termini di ciascuna per uno stesso numero, il che non altera il loro valore (n.° 165).

Minimo denominatore comune.

171. Molti sono i numeri che possono servire di denominatore comune a due o più frazioni; sarà perciò utile il saperne determinare il *minimo*.

A quest' oggetto *si cerca il minimo multiplo comune a tutti i denominatori delle frazioni date* (vedi n.° 152 e 154), *si divide questo per ciascun denominatore, e si moltiplicano i due termini di ciascuna frazione pel respettivo quoziente.*

Esempio. — Debbansi ridurre al minimo comun denominatore le frazioni

$$\frac{3}{4},\ \frac{7}{10},\ \frac{5}{24},\ \frac{3}{25}.$$

Decomponendo i denominatori nei loro fattori primi, si troverà:

$$4 = 2 \times 2;\ 10 = 2 \times 5;\ 24 = 2 \times 2 \times 2 \times 3;$$
$$25 = 5 \times 5.$$

I fattori primi differenti sono 2, 3, 5; ma poichè ciascuno deve prendersi col maggiore esponente col quale trovasi nei numeri dati, il minimo multiplo, o minimo denominatore che si cerca, sarà formato da

$$2^3 \times 3 \times 5^2 = 2 \times 2 \times 2 \times 3 \times 5 \times 5 = 600.$$

Dividendo ora 600 pel primo denominatore 4, si ha di quoziente 150, che, moltiplicato pel numeratore 3, dà 450; la prima frazione è dunque uguale a $\frac{450}{600}$.

Dividendo 600 pel secondo denominatore 10, si ha di quoziente 60, che, moltiplicato pel numeratore 7, dà 420; dunque la seconda frazione è uguale a $\frac{420}{600}$.

Operando analogamente, si trova che la terza frazione è uguale a $\frac{125}{600}$; e la quarta a $\frac{72}{600}$.

Dunque le frazioni proposte $\frac{3}{4}$, $\frac{7}{10}$, $\frac{5}{24}$, $\frac{3}{25}$, sono respettivamente uguali a

$$\frac{450}{600},\ \frac{420}{600},\ \frac{125}{600},\ \frac{72}{600}.$$

Se si fossero ridotte allo stesso denominatore col metodo ordinario (n.° 170), si sarebbe trovato 24000, invece di 600, pel denominatore comune.

In pratica, dopo aver diviso il minimo denominatore comune trovato per ciascuno dei denominatori delle frazioni, si scrivono i quozienti ottenuti sotto alle respettive frazioni, e quindi si moltiplica il *solo* numeratore di ciascuna frazione pel quoziente che le corrisponde; giacchè si sa che il denominatore di tutte le frazioni deve essere il minimo multiplo trovato.

Così il calcolo dell'esempio che precede si dispone nel modo seguente:

Frazioni proposte	$\frac{3}{4}, \frac{7}{10}, \frac{5}{24}, \frac{3}{25}.$	Minimo multiplo
Quozienti . . .	150, 60, 25, 24.	600.
Frazioni ridotte	$\frac{450}{600}, \frac{420}{600}, \frac{125}{600}, \frac{72}{600}.$	

172. In molti casi la riduzione delle frazioni al minimo denominatore comune riesce più spedita, come nel caso seguente.

Sieno le frazioni $\frac{2}{3}, \frac{4}{5}, \frac{8}{15}, \frac{7}{30}.$

Osservo che 30 è multiplo di tutti gli altri denominatori: quindi le frazioni date si possono ridurre ad aver questo numero per denominator comune; e operando come sopra, si otterranno le frazioni $\frac{20}{30}, \frac{24}{30}, \frac{16}{30}, \frac{7}{30}.$

Operazione

Frazioni proposte	$\frac{2}{3}, \frac{4}{5}, \frac{8}{15}, \frac{7}{30}.$
Quozienti	10, 6, 2, 1.
Frazioni ridotte	$\frac{20}{30}, \frac{24}{30}, \frac{16}{30}, \frac{7}{30}.$

173. La riduzione delle frazioni allo stesso denominatore è indispensabile (come vedremo) quando sopra di esse si vuole operare l'addizione e la sottrazione; oppure quando si vuol sapere quale di due o più frazioni è la maggiore.

Siano, per esempio, le due frazioni $\frac{37}{40}$ e $\frac{28}{30}$; quale delle due è la maggiore?

Riducendole allo stesso denominatore, esse divengono respettivamente $\frac{111}{120}$ e $\frac{112}{120}$; dal che si vede che $\frac{28}{30}$ è maggiore di $\frac{37}{40}$.

ESERCIZI

sulle frazioni ordinarie.

XLVII. Calcolare le seguenti espressioni:

$\frac{1}{2} \times 2$; $\frac{3}{4} \times 3$; $\frac{4}{5} \times 7$; $\frac{7}{8} \times 12$; $\frac{8}{9} \times 10$;

$\frac{3}{11} \times 8$; $\frac{4}{7} \times 13$; $\frac{7}{18} \times 5$; $\frac{4}{13} \times 20$; $\frac{8}{23} \times 55$.

$\frac{3}{4} : 2$; $\frac{3}{7} : 4$; $\frac{8}{15} : 3$; $\frac{4}{13} : 7$; $\frac{15}{22} : 8$;

$\frac{3}{20} : 10$; $\frac{11}{25} : 7$; $\frac{4}{41} : 12$; $\frac{3}{10} : 14$.

XLVIII. Estrarre gl'interi dai seguenti numeri frazionari:

$\frac{8}{3}$; $\frac{14}{2}$; $\frac{19}{5}$; $\frac{22}{7}$; $\frac{18}{5}$; $\frac{42}{7}$; $\frac{82}{32}$; $\frac{1863}{123}$; $\frac{38462}{997}$; $\frac{400825}{328}$

XLIX. Riunire in una sola frazione:

$2 + \frac{1}{3}$; $3 + \frac{1}{4}$; $5 + \frac{1}{7}$; $9 + \frac{2}{5}$; $18 + \frac{1}{6}$; $25 + \frac{3}{8}$.

L. Ridurre alla più semplice espressione:

$\frac{2}{4}$; $\frac{4}{8}$; $\frac{3}{9}$; $\frac{4}{16}$; $\frac{5}{15}$; $\frac{7}{28}$; $\frac{6}{36}$; $\frac{7}{49}$; $\frac{8}{16}$; $\frac{15}{25}$; $\frac{12}{60}$; $\frac{80}{90}$.

LI. Ridurre alla più semplice espressione le seguenti frazioni, per mezzo del massimo comun divisore:

$\frac{218}{312}$; $\frac{435}{1044}$; $\frac{506}{924}$; $\frac{696}{2232}$; $\frac{1423}{2204}$; $\frac{5692}{8816}$; $\frac{3480}{11160}$.

LII. Ridurre allo stesso denominatore, nei due modi, le frazioni:

$$\left(\frac{2}{3},\ \frac{4}{5}\right);\left(\frac{3}{4},\ \frac{7}{8}\right);\left(\frac{5}{9},\ \frac{7}{11},\ \frac{1}{2}\right);\left(\frac{1}{3},\ \frac{1}{4},\ \frac{1}{6}\right);$$

$$\left(\frac{5}{8};\ \frac{7}{12}\right);\left(\frac{11}{24},\ \frac{7}{36},\ \frac{5}{63}\right);\left(\frac{3}{54},\ \frac{1}{12},\ \frac{7}{15},\ \frac{3}{28}\right).$$

Si domanda qual'è la maggiore delle due frazioni

$$\frac{157}{271} \quad \text{e} \quad \frac{331}{487}.$$

OPERAZIONI SULLE FRAZIONI.

Addizione.

174. *Per sommare più frazioni, bisogna prima ridurle allo stesso denominatore* (n. 170), *poi fare la somma dei numeratori, e dare a questa somma il denominatore comune. — Se il resultato è un numero frazionario, se ne estraggono gl'interi* (n.° 159).

Esempio. — Debbasi calcolare la somma

$$\frac{3}{8}+\frac{5}{6}+\frac{2}{7}.$$

Queste frazioni, ridotte allo stesso denominatore, divengono respettivamente

$$\frac{126}{336}+\frac{280}{336}+\frac{96}{336}.$$

Sommando ora i numeratori, si ottiene $\frac{502}{336}$; da cui estraendo gl'interi, si trova $1+\frac{166}{336}=1+\frac{83}{168}$.

Dunque $\quad \frac{3}{8}+\frac{5}{6}+\frac{2}{7}=1+\frac{83}{168}.$

175. *Se vi sono dei numeri misti, si fa prima la somma delle frazioni, e quindi se ne estraggono gl'interi che può contenere, per aggiungerli alla somma dei numeri interi.* — Oppure, *si riducono gli interi e le frazioni in un sol numero frazionario* (vedi n°. 160), *e si opera come nell'esempio precedente.*

Esempio. — Debbano sommarsi insieme i numeri misti

$$34+\frac{1}{2}\ ,\quad 8+\frac{3}{4}\ ,\quad 17+\frac{4}{5}\,.$$

Secondo il primo metodo, bisognerà sommare le frazioni, riducendole prima allo stesso denominatore, cioè:

$$\frac{1}{2}+\frac{3}{4}+\frac{4}{5}=\frac{10+15+16}{20}=\frac{41}{20}=2+\frac{1}{20}\,.$$

Ora, facendo l'addizione degl'interi $34+8+17$, si ottiene 59; a cui aggiungendo i 2 interi più $\frac{1}{20}$ ottenuti dalla somma delle frazioni, si avrà:

$$59+2+\frac{1}{20}=61+\frac{1}{20}$$

per la somma cercata.

Operando col secondo metodo, bisognerà riunire gl'interi e le frazioni in numeri frazionari, ed avremo:

$$34+\frac{1}{2}=\frac{69}{2};\ 8+\frac{3}{4}=\frac{35}{4};\ 17+\frac{4}{5}=\frac{89}{5}\,.$$

Ora, considerando i numeri $\frac{69}{2}$, $\frac{35}{4}$, $\frac{89}{5}$ come frazioni, per sommarli, si ridurranno ad avere lo stesso denominatore, e si avrà:

$$\frac{69}{2}+\frac{35}{4}+\frac{89}{5}=\frac{690+175+356}{20}=\frac{1221}{20}$$

$$=61+\frac{1}{20},$$

come sopra.

Il primo metodo però è preferibile; ed ecco il modo di disporre l'operazione:

Esempio pratico. — Sieno da sommarsi i numeri

$$58+\frac{13}{40},\ 70+\frac{1}{15},\ 9+\frac{8}{9},\ 13+\frac{7}{24}\,.$$

Scriveremo questi numeri uno sotto l'altro; poi cercheremo il minimo multiplo comune ai denominatori delle frazioni (n°. 152), e lo scriveremo in alto alla destra degli addendi; sotto ad esso, in colonna, si porranno i quozienti ottenuti dividendo questo minimo multiplo per ciascuno dei denominatori delle frazioni, e alla destra di ognuno di questi quozienti scriveremo il respettivo prodotto pel numeratore della frazione corrispondente. Sommeremo finalmente i prodotti trovati; il resultato lo divideremo pel minimo multiplo o denominatore comune delle frazioni, scrivendo il resto col suo denominatore sotto le frazioni degli addendi e aggiungendo il quoziente alla somma di essi.

Operazione

360 minimo multiplo com.

$58 + \frac{13}{40} \ldots 9 \ldots 117$

$70 + \frac{1}{15} \ldots 24 \ldots 24$

$9 + \frac{8}{9} \ldots 40 \ldots 320$

$13 + \frac{7}{24} \ldots 15 \ldots 105$

Somma: $151 + \frac{103}{180}$ 566 | 360

206 $\quad 1 + \frac{206}{360} = 1 + \frac{103}{180}$.

ESERCIZI

sull'Addizione delle Frazioni.

LIII. Calcolare le seguenti espressioni:

$$\left(\frac{1}{7} + \frac{3}{7}\right); \left(\frac{1}{2} + \frac{2}{3}\right); \left(\frac{13}{14} + \frac{9}{16}\right); \left(\frac{3}{8} + \frac{4}{5}\right);$$

$$\left(\frac{2}{3} + \frac{1}{4} + \frac{4}{9}\right); \left(\frac{3}{4} + \frac{2}{5} + \frac{5}{6}\right); \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{3}{7} + \frac{5}{9}\right);$$

$$\left(4\frac{1}{3} + 3\frac{1}{2}\right); \left(15\frac{1}{4} + 24\frac{2}{5}\right); \left(8\frac{1}{2} + 5\frac{2}{7} + 16\frac{5}{11}\right).$$

LIV. Verificare le seguenti uguaglianze:

$$\frac{2}{3} + \frac{3}{4} + \frac{5}{7} = 2 + \frac{11}{84}.$$

$$\left(5 + \frac{3}{8}\right) + \frac{1}{4} + \frac{2}{3} + \frac{4}{7} + \frac{8}{10} = 2 + \frac{121}{420}.$$

$$\left(2 + \frac{3}{4}\right) + \left(4 + \frac{7}{9}\right) + \left(7 + \frac{2}{5}\right) + \left(14 + \frac{1}{4}\right) = 29 + \frac{8}{45}.$$

$$\left(4 + \frac{3}{5}\right) + \left(3 + \frac{7}{10}\right) + \left(8 + \frac{2}{3}\right) = 16 + \frac{29}{30}.$$

Sottrazione.

176. *Per effettuare la sottrazione delle frazioni, bisogna prima ridurle allo stesso denominatore, togliere poi il numeratore dell'una dal numeratore dell'altra, e dare alla differenza il denominatore comune.*

Esempio. — Debbasi sottrarre $\frac{3}{11}$ da $\frac{2}{5}$.

Riducendo queste due frazioni allo stesso denominatore, esse divengono respettivamente $\frac{15}{55}$ e $\frac{22}{55}$. Ora, togliendo $\frac{15}{55}$ da $\frac{22}{55}$, resta $\frac{7}{55}$.

Dunque $$\frac{2}{5} - \frac{3}{11} = \frac{22 - 15}{55} = \frac{7}{55}.$$

Infatti, sommando il resto $\frac{7}{55}$ col diminutore $\frac{15}{55}$, si ottiene il diminuendo $\frac{22}{55}$.

177. *Se vi sono dei numeri misti, bisogna prima ridurli sotto forma di frazioni* (n°. 160), *e quindi operare come sopra. Oppure si sottraggono separatamente le frazioni tra loro, e gl'interi tra loro, e poi si sommano i due resti.*

Esempio. — Debbasi sottrarre $3 + \frac{1}{3}$ da $18 + \frac{5}{8}$.

Operando col primo metodo, ridurremo questi numeri misti sotto forma di frazioni, e si avrà:

$$\left(18 + \frac{5}{8}\right) - \left(3 + \frac{1}{3}\right) = \frac{149}{8} - \frac{10}{3}.$$

E riducendo queste due ultime espressioni allo stesso denominatore (n°. 170), si otterrà:

$$\frac{149}{8} - \frac{10}{3} = \frac{447}{24} - \frac{80}{24} = \frac{447 - 80}{24}.$$

Ora, togliendo $\frac{80}{24}$ da $\frac{447}{24}$, resta $\frac{367}{24}$;

da cui, estraendo gl'interi, avremo:

$$15 + \frac{7}{24}.$$

Dunque:

$$\left(18 + \frac{5}{8}\right) - \left(3 + \frac{1}{3}\right) = \frac{149}{8} - \frac{10}{3} = \frac{447 - 80}{24}$$

$$= \frac{367}{24} = 15 + \frac{7}{24}.$$

Operando col secondo metodo, disporremo l'operazione come abbiamo fatto per l'addizione, cioè:

			24	
	$18 + \frac{5}{8}$	....	3	15
	$3 + \frac{1}{3}$	....	8	8
Resto:	$15 + \frac{7}{24}$			7

SPIEGAZIONE.

Il numero 24 posto in alto alla destra è il denominatore comune; i due numeri 3 e 8 scritti sotto ad esso sono i quozienti della divisione di 24 per ciascuno dei denominatori delle due frazioni, e gli altri due numeri a destra 15 e 8 sono i pro-

dotti ottenuti moltiplicando i quozienti 3 e 8 per i numeratori delle due frazioni. Sottraendo 8 da 15, resta 7, che è stato scritto col suo denominatore 24 sotto alle due frazioni, ec.

Altro esempio. — Da $105 + \frac{3}{40}$ levare $93 + \frac{5}{16}$.

Operazione.

$$\begin{array}{rlcr} & & 80 & \\ & 105 + \frac{3}{40} \ldots\ldots & 2 \ldots\ldots & 6 \\ & 93 + \frac{5}{16} \ldots\ldots & 5 \ldots\ldots & 25 \\ \hline \text{Resto:} & 11 + \frac{61}{80} & & 61 \end{array}$$

Spiegazione.

Disposta l'operazione come nell'esempio precedente, si scorge che non potendo da 6 togliere 25, perchè $\frac{6}{80}$ è minore di $\frac{25}{80}$, si è aggiunto *un intero* o $\frac{80}{80}$ a $\frac{6}{80}$, cioè si è sommato 80 con 6, dalla somma 86 si è tolto 25, e il resto $\frac{61}{80}$ si è scritto sotto alle due frazioni. E poichè il diminuendo si è aumentato di una unità, si è aggiunta un'unità anche al diminutore, e così da 105 si è tolto 94 ec.

ESERCIZI

sulla Sottrazione delle frazioni.

LV. Effettuare le seguenti sottrazioni:

$\left(\frac{5}{6} - \frac{2}{6}\right)$; $\left(\frac{7}{8} - \frac{3}{4}\right)$; $\left(\frac{4}{9} - \frac{1}{5}\right)$; $\left(\frac{11}{23} - \frac{4}{17}\right)$;

$\left(\frac{3}{8} - \frac{2}{9}\right)$; $\left(\frac{14}{33} - \frac{4}{25}\right)$; $\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right)$; $\left(\frac{3}{10} - \frac{2}{13}\right)$;

$\left(3 + \frac{1}{4}\right) - \left(2 + \frac{4}{5}\right)$; $\left(8 + \frac{3}{4}\right) - \left(6 + \frac{2}{3}\right)$; $\left(34 + \frac{5}{6}\right) - \left(12 + \frac{19}{20}\right)$.

LVI. Verificare le seguenti uguaglianze:

$$\frac{3}{4}-\frac{2}{7}=\frac{13}{28};\quad \frac{2}{3}-\frac{4}{7}=\frac{2}{21}.$$

$$\left(12+\frac{4}{7}\right)-\left(5+\frac{2}{5}\right)=7+\frac{6}{35}.$$

$$\left(30+\frac{7}{8}\right)-\left(28+\frac{5}{6}\right)=2+\frac{1}{24}.$$

$$\left(\frac{3}{4}+\frac{2}{3}+\frac{1}{5}\right)-\left(\frac{1}{2}+\frac{6}{7}\right)=\frac{59}{420}.$$

$$\left(8\frac{2}{3}+5\frac{1}{4}\right)-\left(3\frac{1}{2}+\frac{2}{7}\right)=6+\frac{29}{84}.$$

$$\left(12-\frac{3}{5}\right)+\left(16-\frac{2}{3}\right)+\left(10-\frac{1}{4}\right)=44+\frac{49}{60}.$$

Moltiplicazione.

178. *Moltiplicare un numero per una frazione*, significa *prendere una frazione di questo numero*. Così, moltiplicare 8 per $\frac{2}{3}$, significa *prendere due volte il terzo di* 8.

179. Nella moltiplicazione delle frazioni distingueremo quattro casi.

1°. *Moltiplicare una frazione, per un intero.*

2°. *Moltiplicare un intero per una frazione.*

3°. *Moltiplicare una frazione per una frazione.*

4°. *Moltiplicare interi e frazioni, per interi e frazioni.*

180. Primo caso. — *Per ottenere il prodotto in questo caso si procede come abbiamo detto al n.° 164. —* 1°.

181. Secondo caso. — *Per moltiplicare un intero per una frazione, basta moltiplicare il numero intero per il numeratore della frazione.*

$$\text{Così } 8\times\frac{2}{3}=\frac{8\times 2}{3}=\frac{16}{3}=5+\frac{1}{3}.$$

Infatti, moltiplicare 8 per $\frac{2}{3}$, significa prendere 2 volte il terzo

di 8; ora la terza parte dell'unità essendo $\frac{1}{3}$, la terza parte di 8 unità sarà uguale a 8 volte $\frac{1}{3}$ o $\frac{8}{3}$; per aver dunque il prodotto cercato, basterà prendere 2 volte $\frac{8}{3}$, e si avrà $\frac{8 \times 2}{3} = \frac{16}{3}$, ovvero $5 + \frac{1}{3}$.

Questa regola può dimostrarsi anche nel modo seguente.

Moltiplicando 8 per 2, si ha 16, prodotto 3 volte più grande del prodotto richiesto, perchè il moltiplicatore 2 è 3 volte maggiore di $\frac{2}{3}$; per aver dunque il giusto prodotto, bisogna dividere 16 per 3, con che si ottiene $\frac{16}{3}$, ovvero $5 + \frac{1}{3}$.

In generale, $A \times \frac{a}{m} = \frac{A \times a}{m}$.

182. Terzo caso. — *Per moltiplicare una frazione per una frazione, basta dividere il prodotto dei numeratori per quello dei denominatori.*

Così $$\frac{5}{7} \times \frac{3}{4} = \frac{5 \times 3}{7 \times 4} = \frac{15}{28}.$$

Infatti, moltiplicare $\frac{5}{7}$ per $\frac{3}{4}$, significa prendere i $\frac{3}{4}$ di $\frac{5}{7}$. A tale oggetto basterà prendere $\frac{1}{4}$ di $\frac{5}{7}$, e poi ripeterlo 3 volte. Ora $\frac{1}{4}$ di $\frac{5}{7}$ è (n°. 163) $\frac{5}{7 \times 4}$: moltiplicando questa espressione per 3, si ottiene $\frac{5 \times 3}{7 \times 4}$, come bisognava dimostrare.

La dimostrazione di questa regola può farsi anche nel modo seguente:

Si vuol provare che $\frac{5}{7} \times \frac{3}{4}$ è uguale a $\frac{5 \times 3}{7 \times 4}$.

Moltiplichiamo $\frac{5}{7}$ per 3; si avra (n°. 164) $\frac{5 \times 3}{7}$ o $\frac{15}{7}$, che

è 3 volte più grande di $\frac{5}{7}$. Non si doveva però moltiplicare $\frac{5}{7}$ per 3, ma per $\frac{3}{4}$, ossia per un numero 4 volte più piccolo: dunque il prodotto $\frac{5 \times 3}{7}$ è 4 volte più grande del vero prodotto che si cerca.

Per conseguenza, per ottenere il giusto prodotto, bisognerà rendere l'espressione $\frac{5 \times 3}{7}$, 4 volte più piccola, ciò che si ottiene (n°. 164, 2°.) moltiplicando il suo denominatore per 4; onde si ha $\frac{5 \times 3}{7 \times 4}$; il che dimostra la regola enunciata.

In generale: $\frac{a}{b} \times \frac{c}{m} = \frac{a \times c}{b \times m}$.

183. Quarto caso. — *Per moltiplicare interi uniti a frazioni, per interi e frazioni, si ridurranno gl'interi in numeri frazionari* (n°. 160), *e quindi si opererà come nel terzo caso.* — Oppure, *si potranno moltiplicare le due parti del moltiplicando, per le due parti del moltiplicatore e sommare i resultati* (n°. 59).

Esempio. — Debbasi moltiplicare $8 + \frac{2}{3}$ per $3 + \frac{5}{6}$.

Riducendo a numeri frazionari il moltiplicando e il moltiplicatore, si ha:

$$\left(8+\frac{2}{3}\right) \times \left(3+\frac{5}{6}\right) = \frac{26}{3} \times \frac{23}{6};$$

e quindi (n.° 182):

$$\frac{26 \times 23}{3 \times 6} = \frac{598}{18} = 33+\frac{2}{9},$$

pel prodotto cercato.

Operando col secondo metodo, si avrà (n.° 59):

$$\left(8+\frac{2}{3}\right) \times \left(3+\frac{5}{6}\right) = 8 \times 3 + \frac{2}{3} \times 3 + 8 \times \frac{5}{6}$$

$$+ \frac{2}{3} \times \frac{5}{6} = 24 + \frac{6}{3} + \frac{40}{6} + \frac{10}{18} = 24$$

$$+ \frac{36 + 120 + 10}{18} = 24 + \frac{166}{18} = 33 + \frac{2}{9}.$$

184. *Il prodotto di due frazioni non cambia, invertendo i fattori.*

Così $\frac{3}{4} \times \frac{2}{5} = \frac{2}{5} \times \frac{3}{4}$.

Infatti, $\frac{3}{4} \times \frac{2}{5} = \frac{3 \times 2}{4 \times 5}$; ora $3 \times 2 = 2 \times 3$, e $4 \times 5 = 5 \times 4$; dunque $\frac{3 \times 2}{4 \times 5} = \frac{2 \times 3}{5 \times 4} = \frac{2}{3} \times \frac{3}{4}$.

Frazioni di frazioni.

185. Per *frazioni di frazioni* s'intende un seguito di frazioni legate dalle particelle *di* o *dei*.

Esempio : $\frac{3}{4}$ *dei* $\frac{4}{5}$ *di* $\frac{2}{3}$.

186. *Per valutare le frazioni di frazioni,* ossia *per formare il prodotto di più frazioni, si moltiplicano termine a termine.*

Esempio : Prendere i $\frac{2}{3}$ *dei* $\frac{5}{6}$ *di* $\frac{3}{4}$.

Si avrà : $\frac{2 \times 5 \times 3}{3 \times 6 \times 4} = \frac{30}{72} = \frac{5}{12}$.

Infatti, prendendo primieramente i $\frac{5}{6}$ di $\frac{3}{4}$, si ha $\frac{5 \times 3}{6 \times 4}$, di cui bisogna prendere ancora i $\frac{2}{3}$ e si ottiene $\frac{2 \times 5 \times 3}{3 \times 6 \times 4}$.

187. Ricordando che non si cangia il valore di una frazione, dividendo i suoi due termini per uno stesso numero (n.° 165), si potrà abbreviare il calcolo di ogni espressione frazionaria, *sopprimendo i fattori che sono comuni al numeratore e al denominatore, prima di effettuare le moltiplicazioni.*

Esempio : Debbasi calcolare l'espressione :

$$\frac{2 \times 3 \times 5 \times 7}{3 \times 5 \times 6 \times 8}.$$

Invece di fare il prodotto dei fattori del numeratore e di quelli del

denominatore, osservo che il 3 e il 5 sono fattori comuni ai due termini di questa espressione; li posso perciò sopprimere, e resterà

$$\frac{2\times 7}{6\times 8}.$$

Ma in questa nuova espressione posso dividere per 2 il numeratore e il denominatore, ed ottengo

$$\frac{7}{3\times 8}=\frac{7}{24}$$

pel prodotto cercato.

188. *Il prodotto di due o più frazioni è sempre minore di ciascun fattore.*

Infatti, moltiplicando, per esempio, $\frac{5}{7}$ per 1, si avrebbe di prodotto $\frac{5}{7}$; dunque moltiplicando $\frac{5}{7}$ per una frazione, cioè per un numero minore di 1, per esempio per $\frac{3}{4}$, si avrà un prodotto $\frac{15}{28}$ minore di ciascun fattore.

Al modo stesso si proverebbe che *il prodotto di un numero qualunque per una frazione è sempre minore del moltiplicando.*

ESERCIZI

sulla Moltiplicazione delle frazioni.

LVII. Calcolare le seguenti espressioni:

$$\left(\frac{3}{4}\times\frac{4}{5}\right);\left(\frac{7}{8}\times\frac{2}{3}\right);\left(\frac{8}{9}\times\frac{3}{11}\right);\left(\frac{11}{24}\times\frac{5}{6}\right);$$

$$\left(4\times\frac{2}{3}\right);\left(8\times\frac{4}{5}\right);\left(16\times\frac{3}{8}\right);\left(18\times\frac{4}{15}\right);\left(\frac{3}{4}\times 12\right);$$

$$\left(100\times\frac{3}{4}\right);\left(4+\frac{1}{2}\right)\times\left(3+\frac{1}{5}\right);\left(16+\frac{1}{8}\right)\times\left(3+\frac{4}{9}\right);$$

$$\left(185+\frac{4}{7}\right)\times\left(130+\frac{1}{4}\right).$$

LVIII. Prendere:

$\frac{1}{2}$ di $\frac{3}{4}$; $\frac{1}{11}$ di $\frac{3}{5}$; $\frac{1}{3}$ di $\frac{3}{8}$; $\frac{1}{5}$ di 10; $\frac{1}{9}$ di $\frac{1}{20}$; $\frac{3}{8}$ di 100;

$\frac{5}{6}$ di 60; $\frac{2}{3}$ dei $\frac{3}{8}$ di $\frac{4}{5}$; $\frac{1}{2}$ dei $\frac{3}{4}$ dei $\frac{4}{5}$ di 1000.

LIX. Qual' è la metà d' $\frac{1}{4}$, d' $\frac{1}{6}$, d' $\frac{1}{10}$?

Qual è il terzo del quarto di 36?

Qual' è la differenza fra i $\frac{3}{5}$ di $\frac{7}{8}$ e i $\frac{2}{3}$ di $\frac{1}{20}$?

LX. Calcolare l' espressione $\frac{3}{4}\times\frac{5}{6}\times\frac{4}{5}\times\frac{8}{7}\times\frac{1}{2}$, sopprimendo i fattori comuni.

LXI. Verificare le uguaglianze:

$$\left(4+\frac{3}{7}\right)\times\left(8+\frac{4}{9}\right)=37+\frac{25}{63}. \quad \left(3+\frac{4}{5}\right)\times\left(4+\frac{2}{3}\right)=17+\frac{11}{15}.$$

$$\left(\frac{3}{4}+\frac{2}{3}\right)\times\left(\frac{2}{5}+\frac{1}{10}\right)=\frac{17}{24}. \quad \left(\frac{7}{9}-\frac{2}{5}\right)\times\left(\frac{3}{4}-\frac{1}{6}\right)=\frac{119}{540}.$$

$$\left(\frac{8}{9}+\frac{5}{6}\right)\times\left(\frac{3}{4}-\frac{1}{5}\right)=\frac{341}{360}.$$

$$\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}\right)\times\left(\frac{2}{5}+\frac{1}{6}+\frac{3}{10}\right)=\frac{169}{180}.$$

$$\left(12+\frac{1}{3}+15+\frac{1}{10}\right)\times\left(17+\frac{3}{5}-\frac{5}{7}\right)=463+\frac{81}{350}.$$

Divisione.

189. *Dividere un numero per una frazione*, significa *formare un secondo numero che, moltiplicato per la frazione, riproduca il primo.* — Così dividere 8 per $\frac{2}{3}$, significa trovare un numero che, moltiplicato per $\frac{2}{3}$, riproduca 8.

190. Nella divisione delle frazioni, si dànno quattro casi:

1.° *Dividere una frazione per un numero intero.*
2.° *Dividere un numero intero per una frazione.*
3.° *Dividere una frazione per una frazione.*

4.° *Dividere interi uniti a frazioni per interi e frazioni.*

191. Primo caso. — *Abbiamo già esposto la regola relativa a questo caso al* n.° 164 — 2°.

192. Secondo caso. — *Per dividere un numero intero per una frazione, basta moltiplicare l' intero per la frazione* rovesciata.

$$\text{Così } 8 : \frac{7}{10} = 8 \times \frac{10}{7} = \frac{8 \times 10}{7} = \frac{80}{7} = 11 + \frac{3}{7}.$$

Infatti, dividendo 8 per 7, si ha $\frac{8}{7}$, che è un quoziente 10 volte più piccolo del quoziente che si cerca, giacchè 7 è un divisore 10 volte più grande di $\frac{7}{10}$; quindi, per avere il giusto quoziente, basterà rendere l' espressione $\frac{8}{7}$, 10 volte più grande, e avremo $\frac{8}{7} \times 10 = \frac{8 \times 10}{7}$, come si doveva dimostrare.

La dimostrazione di questa regola può farsi anche nel modo seguente:

Sappiamo (vedi n°. 82) che il quoziente di una divisione non cambia, quando si moltiplica il dividendo e il divisore per uno stesso numero. — Ciò posto, moltiplicando il dividendo 8 e il divisore $\frac{7}{10}$ per $\frac{10}{7}$, il quoziente della loro divisione non resterà alterato, ed avremo:

$$8 : \frac{7}{10} = \left(8 \times \frac{10}{7}\right) : \left(\frac{7}{10} \times \frac{10}{7}.\right)$$

Ma l' espressione $\frac{7}{10} \times \frac{10}{7}$ o $\frac{7 \times 10}{10 \times 7}$ è uguale a 1, e qualunque numero diviso per 1, dà di quoziente il numero stesso; dunque il quoziente cercato è $8 \times \frac{10}{7}$; il che dimostra la regola enunciata.

In generale, $A : \frac{m}{n} = \frac{A \times n}{m}$.

193. Terzo caso. — *Per dividere una frazione per una frazione, bisogna moltiplicare la frazione che fa da dividendo, per la frazione che fa da divisore,* rovesciata.

$$\text{Così } \frac{5}{7} : \frac{3}{4} = \frac{5}{7} \times \frac{4}{3} = \frac{5 \times 4}{7 \times 3} = \frac{20}{21}.$$

Infatti, dividiamo $\frac{5}{7}$ per 3; avremo (n°. 165, 2°): $\frac{5}{7 \times 3}$.

Non si doveva però dividere per 3, ma per $\frac{3}{4}$, cioè per un numero 4 volte più piccolo: dunque il quoziente $\frac{5}{7 \times 3}$ è 4 volte più piccolo del vero, perchè se cresce il divisore diminuisce il quoziente. Per conseguenza, onde ottenere il giusto quoziente, bisognerà rendere l'espressione $\frac{5}{7 \times 3}$, 4 volte più grande, il che si ottiene (vedi n°. 165, 1.°) moltiplicando il numeratore 5 per 4; e si ha $\frac{5 \times 4}{7 \times 3}$; come bisognava dimostrare.

Anche questa regola può, come la precedente, dimostrarsi moltiplicando il dividendo $\frac{5}{7}$ e il divisore $\frac{3}{4}$ per $\frac{4}{3}$.

Infatti (vedi n°. 82), si ha:

$$\frac{5}{7} : \frac{3}{4} = \left(\frac{5}{7} \times \frac{4}{3}\right) : \left(\frac{3}{4} \times \frac{4}{3}\right);$$

ovvero
$$\frac{5}{7} : \frac{3}{4} = \left(\frac{5}{7} \times \frac{4}{3}\right) : 1;$$

dunque
$$\frac{5}{7} : \frac{3}{4} = \frac{5}{7} \times \frac{4}{3}.$$

In generale, $\frac{a}{b} : \frac{m}{n} = \frac{a \times n}{b \times m}$.

194. Quarto caso. — *Per dividere interi uniti a frazione, per interi uniti a frazione, si ridurranno gl' interi in numeri frazionari (n.° 160), e quindi si opererà come nel terzo caso.*

Esempio. — Debbasi dividere $5 + \frac{2}{3}$ per $2 + \frac{3}{4}$.

Riducendo gl' interi in numeri frazionari, si ha:

$$\left(5 + \frac{2}{3}\right) : \left(2 + \frac{3}{4}\right) = \frac{17}{3} : \frac{11}{4}.$$

E quindi (n.° 193)

$$\left(5 + \frac{2}{3}\right) : \left(2 + \frac{3}{4}\right) = \frac{17}{3} : \frac{11}{4} = \frac{17 \times 4}{3 \times 11} = \frac{68}{33} = 2 + \frac{2}{33}.$$

La dimostrazione è uguale a quella che abbiamo fatto pel secondo caso.

195. Per verificare i quozienti ottenuti non dovremo fare altro che moltiplicarli per la frazione che fa da divisore; il prodotto dovrà essere uguale al dividendo (n.° 79).

Così, nell' ultima divisione, moltiplicando il quoziente

$$2+\frac{2}{33}, \text{ o } \frac{68}{33}, \text{ pel divisore} \frac{11}{4}, \text{ si ha}$$

$$\frac{68 \times 11}{33 \times 4} = \frac{748}{132} = 5 + \frac{88}{132} = 5 + \frac{2}{3},$$

che è il dividendo.

196. *Il quoziente di un numero intero, o di una frazione, per una frazione è sempre maggiore del dividendo.*

Infatti, dividendo, per esempio, $\frac{3}{4}$ per 1, si avrebbe di quoziente $\frac{3}{4}$; dunque dividendo per una frazione, cioè per un numero minore di 1, per esempio per $\frac{2}{5}$, dovrà aversi un quoziente $\frac{15}{8}$ più grande del dividendo proposto, perchè diminuendo il divisore, cresce il quoziente.

ESERCIZI

sulla Divisione delle Frazioni.

LXII. Effettuare le seguenti divisioni:

$$\left(\frac{4}{7} : \frac{2}{5}\right); \left(\frac{3}{8} : \frac{1}{11}\right); \left(\frac{8}{9} : \frac{3}{23}\right); \left(\frac{7}{16} : \frac{1}{2}\right); \left(8 : \frac{2}{7}\right);$$

$$\left(9 : \frac{4}{2}\right); \left(15 : \frac{3}{4}\right); \left(18 : \frac{1}{5}\right); \left(4+\frac{1}{2}\right) : \left(3+\frac{1}{5}\right);$$

$$\left(18+\frac{3}{4}\right) : \left(9+\frac{4}{9}\right); \left(16+\frac{1}{3}\right) : \left(8+\frac{2}{15}\right);$$

$$\left(20+\frac{4}{9}\right) : \left(7+\frac{2}{5}\right); \left(16+\frac{5}{6}\right) : \frac{3}{4}; \left(12+\frac{1}{8}\right) : \frac{3}{11}.$$

LXIII. Verificare le seguenti uguaglianze:

$$\left(5+\frac{3}{7}\right):\left(3+\frac{2}{5}\right)=1+\frac{71}{119}.$$

$$\left(\frac{3}{4}+\frac{2}{5}\right):\left(\frac{1}{2}+\frac{2}{3}\right)=\frac{69}{70}.$$

$$\left(\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{2}{5}\right):\left(\frac{1}{2}+\frac{3}{8}\right)=1+\frac{13}{105}.$$

$$\left(8\,\frac{1}{2}-2\,\frac{1}{4}\right):\left(3\,\frac{1}{3}-1\,\frac{1}{8}\right)=2+\frac{44}{53}.$$

$$\frac{3+2\times5\times8\times3}{4\times3\times7\times9\times5}=\frac{4}{21}.$$

$$\left(\frac{3}{4}\times\frac{2}{5}\times\frac{1}{6}\right):\left(\frac{3}{7}\times\frac{1}{8}\times\frac{1}{2}\right)=1+\frac{13}{15}.$$

$$\left(\frac{18\,\frac{1}{2}+5\,\frac{1}{4}}{20\,\frac{1}{3}-7\,\frac{1}{2}}\right):\left(\frac{6\,\frac{1}{5}-3\,\frac{1}{7}}{4\,\frac{1}{10}+2\,\frac{1}{6}}\right)=3+\frac{934}{1177}.$$

PROBLEMI MISTI

sulle frazioni ordinarie.

101. Una persona lascia per testamento la metà del suo patrimonio a suo figlio, i due settimi a sua figlia e L. 12000 che restano alla sua vedova. — Trovare il patrimonio del testatore e la parte di ciascun erede. —

Soluzione. — Sommando $\frac{1}{2}$ con $\frac{2}{7}$ si ha $\frac{11}{14}$ del patrimonio del testatore; per conseguenza le L. 12000 che restano, rappresenteranno i $\frac{3}{14}$ del patrimonio stesso, giacchè $\frac{3}{14}$ è ciò che manca a $\frac{11}{14}$ per formare l' intero. Ora se $\frac{3}{14}$ del patrimonio equivalgono a lire 12000, $\frac{1}{14}$ del patrimonio sarà uguale a L. $\frac{12000}{3}=4000$; e quindi i $\frac{14}{14}$ del patrimonio, o il patrimonio intero,

sarà dato dal prodotto $4000 \times 14 = 56000$. La metà di questa somma, cioè L. $\frac{56000}{2} =$ L. 28000, spetta al figlio, e i due settimi, cioè L. $\frac{56000 \times 2}{7} = \frac{112000}{7} =$ L. 16000, spettano alla figlia.

Dunque: il patrimonio del testatore è L. 56000; la parte del figlio, L. 28000; e quella della figlia, L. 16000.

102. Deve dividersi una data somma fra tre persone, *A*, *B*, *C*, in maniera che *A* ne abbia $\frac{1}{4}$, *B* $\frac{2}{5}$ e *C* L. 700 che restano. — Trovare la somma totale, e la parte di *A* e di *B*.

R. — Somma totale: L. 2000; parte di *A*: L. 500; di *B*: L. 800.

103. Un operaio può fare un lavoro in 5 ore, un altro può farlo in 15 ore. — In quante ore lo faranno essi, se lavorano insieme?

Soluzione — In un'ora il primo fa $\frac{1}{5}$ del lavoro; il secondo ne fa $\frac{1}{15}$; dunque se lavorano insieme, in un'ora ne faranno $\frac{1}{5} + \frac{1}{15} = \frac{4}{15}$; quindi $\frac{1}{15}$ del lavoro lo faranno in $\frac{1}{4}$ d'ora, e i $\frac{15}{15}$, o il lavoro intero, lo faranno in $\frac{15}{4}$ d'ora, ossia in Ore $3 + \frac{3}{4}$.

Il numero richiesto è dunque Ore $3 + \frac{3}{4}$.

104. Una fontana dà 6 ettolitri d'acqua in 5 minuti, un'altra fontana ne dà 8 litri in 10 minuti. — Quanti ettolitri ne daranno esse ogni ora, versando insieme?

R. — Ettolitri 120.

105. Due fontane alimentano un bacino; la prima, versando sola, empirebbe il bacino, supposto vuoto, in 3 ore; la seconda in 5 ore. — Trovare il tempo che le due fontane impiegheranno ad empire il bacino, versando insieme.

R. — Ore 1, Minuti 52, Secondi 30.

106. Dividere L. 64440 fra quattro persone in modo, che la seconda parte sia i $\frac{2}{3}$ della prima; che la terza sia i $\frac{4}{7}$ della seconda, e che la quarta sia gli $\frac{8}{11}$ della terza.

Soluzione. — La seconda parte dovendo essere i $\frac{2}{3}$ della prima, la terza i $\frac{4}{7}$ della seconda, o gli $\frac{8}{21}$ della prima, e la quarta gli $\frac{8}{11}$ della terza, o i $\frac{64}{231}$ della prima, è chiaro che la somma 64440 delle quattro parti

uguaglia la prima parte, più i $\frac{2}{3}$ più gli $\frac{8}{21}$ più i $\frac{64}{231}$ della prima, ovvero uguaglia la prima parte più i $\frac{19278}{14553}$ della prima, cioè $\frac{14553}{14553}+\frac{19278}{14553}=\frac{33831}{14553}$.

La somma di L. 64440 essendo dunque i $\frac{33831}{14553}$ della prima parte, si otterrà il valore di quest' ultima dividendo 64440 per $\frac{33831}{14553}$, e si avranno L. 27720, che è quanto spetta alla prima persona. — La seconda dovendo avere i $\frac{2}{3}$ della prima, avrà $\frac{27720 \times 2}{3}$ = L. 18480; la terza dovendo avere i $\frac{4}{7}$ di ciò che ha la seconda, avrà $\frac{18480 \times 4}{7}$ = L. 10560; finalmente, la quarta dovendo avere gli $\frac{8}{11}$ di quanto ha la terza, avrà $\frac{10560 \times 8}{11}$ = L. 7680.

Infatti: $27720 + 18480 + 10560 + 7680 = 64440$.

107. Dividere L. 63 fra due persone, in maniera che una delle parti sia i $\frac{3}{4}$ dell'altra.

R. — Le due parti sono 36 e 27.

108. Dividere L. 128 fra tre persone, in modo che la seconda parte sia i $\frac{3}{4}$ della prima e che la terza sia i $\frac{5}{7}$ della seconda.

R. — Le tre parti sono: 56, 42 e 30.

109. Due fontane forniscono l' una 25 litri d' acqua in 4 ore, e l' altra 29 litri in 5 ore. — Quale delle due dà più acqua in un' ora, e quanta ne dà di più dell' altra?

R. — La prima fontana fornisce in un' ora $\frac{49}{20}$ di litro di più della seconda.

110. Un numero è composto di 4 parti; le prime tre sono $25 + \frac{1}{5}$, $17 + \frac{1}{4}$, e $20 + \frac{1}{8}$, e si sa che i $\frac{5}{8}$ della quarta equivalgono alla somma delle altre tre. — Qual è il valore della quarta? — Quale è il numero totale?

R. — Il valore della quarta è $100 + \frac{3}{25}$. — Il numero totale è $162 + \frac{139}{200}$.

TEORIA DELLE FRAZIONI DECIMALI.

197. Si chiamano *parti decimali* dell' unità le parti che si ottengono dividendo l'unità in 10, 100, 1000, ec., parti uguali. Queste parti saranno dunque *decimi*, *centesimi*, *millesimi*, ec. d'unità. — Si chiamano ancora *unità decimali* di *primo*, di *secondo*, di *terzo* ec. ordine.

Un' unità decimale d'un ordine qualunque vale dieci unità decimali dell' ordine seguente. — Così un' unità vale dieci *decimi*; un decimo vale dieci *centesimi*; un centesimo, dieci *millesimi*; e così di seguito.

Si chiama *frazione decimale* una frazione composta di parti decimali dell' unità; essa ha per denominatore una potenza di 10, o l' unità seguità da uno o più zeri.

Esempio. — Le frazioni $\frac{3}{10}$, $\frac{29}{100}$, $\frac{2348}{10000}$, sono frazioni decimali.

Diconsi *numeri decimali* quelli che sono formati di unità più una frazione decimale, come $8 + \frac{4}{10}$.

198. Il principio fondamentale della numerazione scritta (vedi n.° 24) fornisce il mezzo di scrivere i numeri decimali come i numeri interi. Infatti, le differenti cifre d' un numero qualunque, in virtù di questo principio, esprimendo unità di 10 in 10 volte più piccole a misura che si avanzano d'un posto verso la destra, ne resulta, che, se si pongono alla destra e sulla stessa linea di un numero intero già scritto, più cifre l'una di seguito all' altra, la prima di queste cifre rappresenterà *decimi* d' unità, la seconda, decimi di decimi o *centesimi*, la terza, decimi di centesimi, o *millesimi*, e così di seguito; avendo cura però di scrivere una virgola subito dopo le unità semplici.

Ciò posto, se si considera un numero decimale qualunque, per esempio $\frac{54728}{1000}$, e che voglia mettersi sotto la forma d' un numero intero, osserveremo che esso si può decomporre in $\frac{54000}{1000}$ più $\frac{700}{1000}$ più $\frac{20}{1000}$ più $\frac{8}{1000}$, o 54 *unità* più $\frac{7}{10}$ più $\frac{2}{100}$ più

$\frac{8}{1000}$, e che, per conseguenza, può scriversi in questa maniera: 54,728.

199. Si vede adunque che per rappresentare i *decimi* è necessaria, dopo la virgola, UNA sola cifra; per i *centesimi*, sono necessarie DUE cifre; per i *millesimi*, TRE; pei *diecimillesimi*, QUATTRO; per i *centomillesimi*, CINQUE, e così di seguito.

200. In generale, *per scrivere un numero decimale, si comincia dal porre la parte intera, a destra della quale si mette una virgola: quindi si scrive la parte decimale, avvertendo di porre l'ultima sua cifra al luogo dell'ordine di unità che essa rappresenta. — Se la parte intera manca, si sostituisce con uno zero.*

Esempi:

Otto unità e quattro decimi, si scrive: . . . . . . 8,4.
Quarantaquattro centesimi, . . , ... , . 0,44.
Sei unità e otto centesimi, ... 6,08.
Tre unità e quattro millesimi, ... 3,004.
Venti unità e nove diecimillesimi, ... 20,0009.
Cinque milionesimi, ... 0,000005.

201. Dal principio dimostrato più sopra (n.° 198), si deduce ancora, che: *per leggere un numero decimale, si enuncia prima la parte intera a sinistra della virgola, poi la parte decimale, come se fosse un numero intero, dando ad essa la denominazione di* DECIMI, *se dopo la virgola vi è una sola cifra; di* CENTESIMI, *se vi sono due cifre; di* MILLESIMI *se ve ne sono tre*, ec.

Esempi:

3,8 . . . si legge: 3 *unità* e 8 *decimi*.
44,15 . . . . 44 *unità* e 15 *centesimi*.
2,154. . . . . . . 2 *unità* e 154 *millesimi*.
0,1684 . . . . 1684 *diecimillesimi*.
4,00234 . . . . . . 4 *unità* e 234 *centomillesimi*.

Proprietà dei numeri decimali.

202. TEOREMA 1.° — *Non si cangia il valore d'un numero decimale, scrivendo o togliendo degli zeri alla sua destra.*

Così 3,4000 = 3,4.

Infatti, dopo avere aggiunto o tolto gli zeri, il valore relativo d'ogni cifra significativa resta sempre lo stesso.

203. Corollario. — *Per ridurre* dunque *più numeri decimali allo stesso denominatore, basterà aggiungere alla destra di ciascuno un numero conveniente di zeri, affinchè la parte decimale di ciascun numero, abbia lo stesso numero di cifre decimali.*

Così 3,2; 8,049; 0,32
diventano respettivamente 3,200; 8,049; 0,320.

204. Teorema 2.° — *Un numero decimale diviene* 10, 100, 1000 . . . . *volte più grande, a misura che si avanza la virgola di uno, due, tre . . . posti verso la* destra.

Abbiasi il numero 34,26; avanzando la virgola d' un posto verso la destra, si ha 342,6, numero 10 volte *più grande* del primo.

Infatti, la cifra 6, che esprimeva *centesimi*, ora esprime decimi o unità dieci volte più grandi; la cifra 2, che esprimeva *decimi*, ora esprime unità semplici, o unità dieci volte più grandi e così di seguito. Dunque ognuna delle parti del numero proposto si è resa dieci volte più grande; dunque il numero stesso è divenuto dieci volte più grande. In modo analogo si dimostra che, trasportando la virgola di due posti verso destra il numero diventa cento volte più grande, e così di seguito.

205. Corollario. — *Per moltiplicare un numero decimale per* 10, 100, 1000 . . . . *ec., basta avanzare la virgola verso destra di* un *posto per* 10, *di* due *posti per* 100, *di* tre *per* 1000 ec.

Così, per moltiplicare per 100 il numero 7,342, basterà scrivere 734,2. — Ecco altri esempi:

$$84{,}328 \times 10 = 843{,}28;$$
$$7{,}52 \times 100 = 752;$$
$$0{,}1379 \times 1000 = 137{,}9.$$

Se le cifre necessarie al trasporto della virgola non bastano, allora si supplisce con zeri, posti alla destra *del numero decimale.* — Esempio: se si volesse moltiplicare per 1000 il numero 41,6, non essendovi che una cifra decimale, si aggiungeranno due zeri alla sua destra, e si otterrà 41,600; ora, avanzando la virgola di tre posti verso la destra, avremo 41600 unità.

206. Teorema 3.° — *Un numero decimale diviene* 10, 100, 1000 . . . *volte più piccolo a misura che si avanza la virgola di uno, due, tre . . . . posti verso la* sinistra.

Abbiasi il numero 342,6; avanzando la virgola d'un posto verso la sinistra si ha 34,26, numero 10 volte *più piccolo* del primo.

Infatti, la cifra 6, che esprimeva *decimi*, ora esprime centesimi o unità dieci volte più piccole; la cifra 2, che rappresentava *unità semplici*, ora esprime decimi o unità dieci volte più piccole, e così di seguito. Dunque ognuna delle parti del numero proposto si è resa dieci volte più piccola; dunque il numero stesso è divenuto dieci volte più piccolo. Similmente si dimostra che il numero diventa cento, mille . . . volte più piccolo trasportando la virgola di due, tre . . . posti verso sinistra.

207. Corollario. — *Per dividere un numero decimale per* 10 100, 1000 . . . . *basta avanzare la virgola, verso la sinistra di* un *posto per* 10, *di* due *posti per* 100, *di* tre *per* 1000 ec.

Così, volendo dividere il numero 843,2 per 10, basterà scrivere 84,32. — Altri esempi:

$$784{,}29 : 100 = 7{,}8429;$$
$$6932{,}4 : 1000 = 6{,}9324;$$
$$32{,}56 : 10 = 3{,}256.$$

Se non vi sono cifre bastanti a sinistra, si supplisce con zeri.
Esempio. — 3,5 : 100 = 0,035.

Modo di porre un numero decimale sotto forma di frazione ordinaria, e reciprocamente.

208. *Per porre un numero decimale sotto forma di frazione ordinaria, bisogna sopprimere la virgola, e dare per denominatore al numero così ottenuto l'unità seguita da tanti zeri, quante sono le cifre decimali del numero proposto* (vedi n°. 197).

$$\text{Così } 0{,}25 = \frac{25}{100} = \frac{1}{4};\ 0{,}125 = \frac{125}{1000} = \frac{1}{8};$$
$$3{,}05 = \frac{305}{100} = \frac{61}{20}.$$

Le frazioni $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{8}$, $\frac{61}{20}$, così ottenute, diconsi le *generatrici* di 0,25; 0,125; 3,05, come vedremo a suo luogo.

209. Reciprocamente, *per scrivere sotto forma di numero decimale una frazione ordinaria che ha per denominatore l'unità seguita da uno o più zeri, basta scrivere il numeratore, e separare sulla sua destra con una virgola tante cifre decimali, quanti sono*

gli zeri nel denominatore. — Se il numero non ha abbastanza cifre, si scriveranno alla sua sinistra tanti zeri, che bastino a render possibile l'operazione.

Così:

$$\frac{728}{100} = 7,28; \quad \frac{3}{1000} = \frac{0003}{1000} = 0,003.$$

ESERCIZI

sulla numerazione dei numeri decimali.

LXIV. Leggere i numeri decimali seguenti:

7,8; 32,44; 5,372; 0,28; 6,04; 0,03; 20,5; 42,009; 7,1740; 0,032; 0,75; 4,15; 14,3204. 14,32045; 5,2; 0,3; 7,8125; 0,457042; 0,000328.

LXV. Scrivere in cifre i numeri decimali: Sei unità e quattro decimi. — Sette unità e quindici centesimi. — Quaranta unità e due millesimi. — Quattro decimi. — Tre centesimi. — Cinque millesimi. — Dieci unità e un centesimo. — Settanta millesimi. — Diciotto unità e ottanta centesimi. — Cinquecento millesimi. — Ventisette unità e dieci millesimi. — Tremilasei diecimillesimi. — Quattrocentonovanta centomillesimi. — Due milionesimi.

LXVI. Rendere i numeri decimali seguenti ciascuno 10,100, 1000, 10000 volte più grandi:

23,45738. — 119,8730. — 2,14. — 6,153. — 49,51. — 0, 25. — 3,4. — 0,3. — 8,21009.

LXVII. Rendere i numeri seguenti ciascuno 10, 100, 1000. 10000 volte più piccoli:

87034,29. — 3234,6. — 832,143. — 22,873. — 9,334. — 0,018. — 0,19. — 2. — 4,4. — 0,6.

LXVIII. Porre sotto forma di numeri decimali le espressioni seguenti:

$$\frac{7}{10}; \frac{9}{100}; \frac{114}{10}; \frac{368}{1000}; \frac{506}{100000}; \frac{32}{10000}.$$

LXIX. Porre sotto forma di frazioni ordinarie i numeri seguenti:

0,07; 93,15; 8,185; 0,002; 0,075; 3,0002;
48,15; 6,0023; 0,000856.

CALCOLO DEI NUMERI DECIMALI.

Addizione.

210. *Per fare l'addizione dei numeri decimali, si scrivono gli uni sotto gli altri in modo, che le unità dello stesso ordine, o semplicemente le virgole, si trovino nella medesima colonna verticale; si comincia poi l'operazione dalla destra, come se i numeri fossero interi, e alla somma si pone una virgola nella stessa colonna delle altre.*

Esempio: Debbasi calcolare la somma:

$$41{,}16 + 0{,}8934 + 3{,}25 + 9{,}0675.$$

Operazione

$$\begin{array}{lr} & 41{,}16 \\ & 0{,}8934 \\ & 3{,}25 \\ & 9{,}0675 \\ \hline \text{Totale:} & 54{,}3709 \end{array}$$

ESERCIZI

LXX. Calcolare:

$48{,}3 + 2{,}28 + 16{,}84.$

$35{,}47 + 0{,}9 + 17{,}254 + 3{,}14.$

$0{,}15 + 0{,}7 + 0{,}004 + 35{,}43 + 9{,}1243.$

$184{,}3 + 84 + 73{,}2 + 3{,}15 + 93{,}008453.$

Sottrazione.

211. *Per effettuare la sottrazione dei numeri decimali, si scrive il più piccolo sotto il più grande in modo, che le unità dello stesso ordine, o semplicemente le virgole, sieno l'una sotto l'altra; si fa poi l'operazione come quella dei numeri interi, cominciando dalla destra, e ponendo una virgola al resultato nella stessa colonna delle altre.*

Esempio: Debbasi togliere da 43,56 il numero 9,385.

OPERAZIONE

	43,56
	9,385
Resto	34,175
Prova	43,560

ESERCIZI

LXXI. Calcolare:

(3,44 — 2,18); (16,3 — 8,43);
(48,15 — 16,528); (140,3 — 19,269);
(0,35 — 0,18); (0,463 — 0,1893);
(184,9 — 25,0832); (828,18 — 187269).

Complemento aritmetico.

212. Il *Complemento aritmetico* d'un numero è il resto della sottrazione di questo numero dall'unità seguita da uno o più zeri.

Si dice complemento al 10, quando il numero dato si sottrae da 10; complemento al 100, quando si sottrae da 100 ec.

Esempi: Il complemento al 10 di 3 è 7, perchè $10 - 3 = 7$; il complemento al 100 di 70, è 30, perchè $100 - 70 = 30$; il complemento al 1000 di 183,15 è 816,85, perchè $1000 - 183{,}15 = 816{,}85$.

L'uso del complemento aritmetico riduce qualunque sottrazione ad un'addizione.

Infatti, debbasi togliere da 785 il numero 328; avremo:

$$785 - 328 = 785 + (1000 - 328) - 1000$$
$$= (785 + 672) - 1000 = 1457 - 1000 = 457.$$

Dal che si vede, che *per sottrarre un numero da un altro, si può aggiungere al diminuendo il complemento aritmetico del diminutore, purchè si sopprima nel resultato l'unità sulla quale è stato preso il complemento.*

Così, per trovare la differenza fra 48,25 e 17,938, basterà aggiungere al diminuendo 48,25 il complemento aritmetico al 100 del diminutore, purchè dal resultato si tolga un centinaio.

Il complemento al 100 di 17,938 è 82,062; aggiungendo questo numero a 48,25, si ha 48,25 + 82,062 = 130,312; e togliendo un centinaio dal resultato, resta 30,312, per la differenza richiesta.

In pratica, si opera così:

Operazione		Spiegazione
Diminuendo	48,25	Scritto il diminuendo 48,25 si dovrà porre sotto ad esso il complemento aritmetico del diminutore 17,938 e quindi fare la somma di questi due numeri. —
Complemento	$\bar{1}82,062$	
Differenza	30,312	

Per calcolare il complemento al 100 del diminutore 17,938, si dirà (n.° 43) cominciando da destra: dall'8 al 10,2, che scrivesi nel posto dei millesimi, e si porta 1; dal 4 al 10,6, che scrivesi sotto il 5, e si porta 1; dal 10 al 10,0, che scrivesi sotto il 2, e si porta 1; dall'8 al 10,2, che scrivesi sotto l'8, e si porta 1; dal 2 al 10,8, che scrivesi sotto il 4. — O, ciò che è lo stesso e riesce più facile, si potrà anche trovare il complemento richiesto *togliendo la prima cifra a destra dal* 10 *e tutte le altre dal* 9; cioè diremo: dall'8 al 10,2, e si scrive 2; dal 3 al 9,6; dal 9 al 9,0; dal 7 al 9,2; dall'1 al 9,8; e per indicare che dal resultato devesi togliere un *centinaio,* porremo alla sinistra del complemento un 1 con una lineetta sopra. — Il complemento al 100 del diminutore 17,938 è dunque 82,062, che sommato col diminuendo 48,25, darebbe per resultato 130,312; ma sopprimendo l'unità sulla quale è stato preso il complemento, cioè *un centinaio,* resterà 30,312 per la differenza cercata.

Debbasi ora calcolare l'espressione:

$$874,12 - 168,15 + 34,20 + 17,25 - 38,428.$$

Procedendo nel modo ordinario bisognerebbe prima sommare 874,12 con 34,20 con 17,25; quindi sommare 168,15 con 38,428, e dalla somma maggiore togliere la minore.

Facendo uso del complemento aritmetico, l'operazione si riduce ad una sola addizione.

Operazione	Spiegazione
+ 874,12 + 34,20 + 17,25 $\bar{1}$831,85 $\bar{1}$61,572 718,992	Scriviamo uno sotto l'altro i numeri preceduti dal segno +, come si vede qui a sinistra. Ciò fatto, prenderemo il complemento al 1000 del numero 168,15, dicendo: dal 5 al 10,5, che si scrive nella colonna dei *centesimi;* dall' 1 al 9,8, che scrivesi sotto i *decimi;* dall'8 al 9,1, che scrivesi sotto le

unità; dal 6 al 9,3, che scrivesi sotto le *diecine;* dall' 1 al 9,8, che scrivesi sotto le *centinaia;* e porremo nella colonna delle migliaia un $\bar{1}$. Resta ora da prendere il complemento al 100 del numero 38,428; e operando analogamente, vale a dire togliendo la prima cifra da 10 e le altre da 9, troveremo $\bar{1}$61,572. Sommando i numeri in colonna, ed avvertendo di togliere *un centinaio* e *un migliaio* dalla somma, si avrà per resultato 718, 992. Per verificarlo, basta sommare i numeri preceduti dal segno +, che diconsi *positivi*, indi sommare i numeri preceduti dal segno —, che si chiamano *negativi,* e quindi sottrarre la somma minore dalla maggiore; così

positivi	negativi
874,12	
34,20	168,15
17,25	38,428
925,57	206,578

Ora: 925,57 — 206,578 = 718,992, che è il resultato trovato di sopra.

ESERCIZI

sul complemento aritmetico.

LXXII. Trovare il complemento dei numeri:

537; 1940; 3602; 99108; 79921000;
5,37; 8,735; 9,12; 384,7; 7246,34.

LXXIII. Trovare per mezzo del complemento le seguenti differenze:

(530458 — 238974); (234,56 — 198,48).

LXXIV. Calcolare l'espressione:

$$348{,}15 + 18{,}16 - 264{,}15 + 326{,}88 - 14{,}826 + 9.$$

LXXV. Verificare per mezzo del complemento le seguenti uguaglianze:

$$35{,}423 - 112{,}592 + 59{,}21 - 2{,}38 + 89{,}3 - 24{,}7 = 44{,}261.$$
$$1234{,}368 - 582{,}91 + 36{,}28 - 280{,}34 - 125{,}654 = 281{,}744.$$

Moltiplicazione.

213. *Si fa la moltiplicazione dei numeri decimali come quella degl'interi, senza guardare alla virgola; ma, dopo l'operazione, bisogna separare con una virgola sulla destra del prodotto, tante cifre decimali, quante ve ne sono nei fattori riuniti.*

Esempio 1°. Calcolare il prodotto $18{,}326 \times 2{,}47$.

OPERAZIONE

```
          18326
            247
         ------
         128282
         73304
        36652
Prodotto 4526522
```

Il prodotto cercato sarà 45,26522, perchè il moltiplicando e il moltiplicatore contengono insieme cinque cifre decimali.

Per rendersi ragione di questa regola, basta osservare che, sopprimendo la virgola nel moltiplicando, esso diviene 1000 volte più grande (n°. 204), e, per conseguenza, il prodotto sarà 1000 volte più grande del vero. Parimente, sopprimendo la virgola nel moltiplicatore, esso diviene 100 volte più grande, e, per conseguenza il prodotto sarà 100 volte più grande del giusto prodotto che si cerca. Bisogna dunque dividere il prodotto ottenuto per 1000 e poi per 100, ossia per 100000, il che si ottiene (n.° 207) separando sulla sua destra cinque cifre decimali, come bisognava dimostrare.

La regola precedente può anche dimostrarsi così:

I numeri decimali 18,326 e 2,47 possono porsi sotto la forma $\frac{18326}{1000}$ e $\frac{247}{100}$.

Per conseguenza, si ha (n.° 182):

$$18{,}326 \times 2,\, 47 = \frac{18326}{1000} \times \frac{247}{100} = \frac{18326 \times 247}{100000}$$

$$= \frac{4526522}{100000} = 45{,}26522,$$

il che dimostra la regola.

Esempio 2.° Debbasi moltiplicare 0,0357 per 0,25.

OPERAZIONE	SPIEGAZIONE
357 25 1785 714 0,008925	Il prodotto sarebbe 8925; ma poichè sei sono le cifre decimali nei due fattori riuniti, e il prodotto non ne ha che quattro, si aggiungeranno alla sinistra di esso due zeri, poi la virgola, e un altro zero per occupare il posto degl'interi. Il prodotto cercato è dunque 0,008925.

Da questo esempio si vede, che quando il prodotto ha meno cifre del numero di decimali dei fattori riuniti, si pone alla sinistra di esso un numero convenevole di zeri, affinchè ogni cifra esprime il valore relativo che deve avere (vedi n°. 207).

ESERCIZI

LXXVI. Calcolare:

$(3{,}4 \times 2)$; $(14{,}3 \times 2{,}5)$; $(16{,}04 \times 3{,}2)$; $(443{,}3 \times 3{,}25)$;
$(893{,}2 \times 0{,}35)$; $(0{,}354 \times 0{,}73)$; $(893{,}28 \times 100)$;
$(8{,}5 \times 8{,}3)$; $(663{,}246 \times 3{,}25)$; $(0{,}003 \times 0{,}004)$.

LXXVII. Verificare le uguaglianze:

$1{,}2 \times 0{,}46 = 0{,}552.$ $\quad 6{,}378 \times 5{,}96 = 38{,}01288.$

$(8{,}15 + 13{,}28) \times (5{,}4 + 16{,}8) = 475{,}646.$

$(18{,}325 + 9{,}47) \times (304{,}2 - 30{,}92) = 7595{,}8176.$

$0{,}372106 \times 0{,}0054 = 0{,}0020093724.$

$0{,}376 \times 0{,}0076894 = 0{,}0028912144.$

Metodo per ottenere il prodotto di due numeri decimali con una data approssimazione.

214. Quando debbono moltiplicarsi due numeri contenenti ciascuno molte cifre decimali, l'operazione si può abbreviare, mediante il metodo che ora esporremo.

Proponiamoci, per esempio, di moltiplicare il numero decimale 248,7359485 per 35,472861, con un errore al prodotto minore d'un centesimo. Il prodotto di questi due numeri, ottenuto col metodo ordinario, è 8823,3757268436585; ma questa moltiplicazione si può abbreviare tenendo conto nei prodotti parziali solamente dei centesimi, e delle unità degli ordini superiori; e poichè 10 millesimi fanno un centesimo, converrà pure tener conto dei millesimi.

A tale oggetto *s'inverte* il moltiplicatore e si scrive sotto il moltiplicando in modo, che la cifra 5 delle sue unità semplici sia sotto i millesimi del moltiplicando, come qui si vede.

Operazione

Moltiplicando		248,7359485	
Moltiplicatore invertito . . .		1682,7453	
Prodotti parziali	per 3 . .	7462078	millesimi
	per 5 . .	1243679	. . . . .
	per 4 . .	99494	. . . .
	per 7 . . .	17411	. . . .
	per 2 . . .	497	. . . .
	per 8 . . .	198	. . . .
	per 6	14	. . . .
Prodotto totale . .		8823,371	millesimi

Disposta in tal modo l'operazione, ciascuna cifra del moltiplicatore, moltiplicata per la cifra corrispondente del moltiplicando, darà al prodotto dei millesimi.

Posto ciò, si comincia l'operazione dalla destra, moltiplicando per ciascuna cifra del moltiplicatore la parte corrispondente del moltiplicando, vale a dire, trascurando la parte del moltiplicando che è alla destra della cifra che fa da moltiplica–

tore, tranne il porto che si otterrebbe moltiplicando la cifra precedente, il quale deve aggiungersi al primo prodotto. — Così si dirà: 3 via 4 fa 12, che non si scrive, ma si ritiene 1; 3 via 9 fa 27 e 1 di porto 28; scrivesi l'8 sotto il 3 e si ritiene 2; 3 via 5 fa 15 e 2 di porto 17; si scrive il 7 e si porta 1 ec.; avremo così il primo prodotto parziale 7462078 millesimi.

Passando poi alla seconda cifra 5 del moltiplicatore, diremo: il prodotto di 5 per 9 è 45, che non si scrive, ma si ritiene 4; 5 via 5 fa 25 e 4 di porto 29; si scrive 9 e si porta 2; 5 via 3 fa 15 e 2 di porto 17; si scrive 7 ec., e con ciò si otterrà il secondo prodotto parziale 1243679 millesimi.

Si moltiplicherà così successivamente per le cifre 4, 7, 2, 8 e 6, cominciando sempre dalla cifra che loro corrisponde nel moltiplicando, senza occuparsi, per conseguenza, della cifra 1 del moltiplicatore, perchè non ha cifra corrispondente.

Sommando finalmente tutti i prodotti si ottiene 8823371, sulla destra del quale si separeranno tre cifre; in guisa che il prodotto cercato sarà 8823,371, con un errore più piccolo d'un centesimo.

Se la cifra trascurata nel prodotto fosse maggiore di 5, si potrebbe aumentare di uno la cifra precedente.

Analogamente si procede, quando si vuole un'altra approssimazione nel prodotto; avvertendo però di collocar sempre la cifra delle unità del moltiplicatore sotto quella cifra del moltiplicando, la quale rappresenta le unità dell'ordine immediatamente inferiore a quello che indica l'approssimazione.

ESERCIZI

LXXVIII. Calcolare i seguenti prodotti con un errore minore d'un centesimo:

$$(135{,}48623 \times 38{,}\ 4286);\ (83{,}49325 \times 5{,}3789),$$

LXXIX. Verificare l'uguaglianza:

$$3{,}58697425 \times 62{,}8579831 = 225{,}47,$$

nella quale il prodotto è calcolato a meno d'un centesimo.

LXXX. L'anno tropico è di giorni solari medi 365,24226, e l'anno siderale di 365,25638. — Trovare la lunghezza di questi anni in giorni siderali, con un errore minore di 0,0001, sapendo che il giorno solare medio è uguale a giorni siderali 1,00273908.

Divisione.

215. Nella divisione dei numeri decimali distingueremo due casi:

1.° *Il divisore è un numero intero.*

2.° *Il divisore è un numero decimale.*

216. Primo caso. — *Per dividere un numero decimale per un numero intero, si sopprime la virgola nel dividendo, e si effettua la divisione come quella dei numeri interi, avvertendo di separare con una virgola sulla destra del quoziente, tante cifre decimali, quante ne contiene il dividendo.*

Esempio 1.° — Debbasi dividere 3788,20 per 52.

Sopprimendo la virgola, si ha 378820, che, diviso per 52, dà per quoziente 7285: ma il dividendo aveva due cifre decimali, dunque dovremo separarne due anche al quoziente, il quale sarà 72, 85.

È facile rendersi ragione di questa regola.

Infatti, sopprimendo la virgola nel dividendo, esso è divenuto 100 volte più grande, per conseguenza anche il quoziente 7285 è 100 volte più grande del vero; perchè se aumenta il dividendo, aumenta anche il quoziente. Dunque, per ottenere il giusto quoziente, bisognerà rendere il numero 7285 cento volte più piccolo, il che si ottiene separando due cifre sulla sua destra.

217. Secondo caso. — *Per dividere due numeri decimali l'uno per l'altro, bisogna fare in modo che il dividendo e il divisore abbiano lo stesso numero di cifre decimali* (ciò che si ottiene facilmente aggiungendo degli zeri alla destra di quello che ne ha meno). *Si scrive una seconda volta il dividendo e il divisore, trascurando la virgola, e si effettua la divisione come quella dei numeri interi.*

Esempio 2.° — Dividere 14,3 per 0,052.

Si scrive 14,300 : 0,052;

e quindi

```
14300 | 52
 390  |------------------
  260 | 275 quoziente
   00
```

Per dimostrare questa regola, osserveremo primieramente che, aggiungendo due zeri alla destra del dividendo, esso non ha cambiato valore (n.º 202); in secondo luogo, sopprimendo la virgola nel dividendo e nel divisore, questi due numeri sono divenuti 1000 volte più grandi, e, per conseguenza il quoziente della loro divisione non resta alterato (n.º 82).

218. Resulta dalle regole precedenti che se i due numeri avessero uno stesso numero di cifre decimali, basterebbe semplicemente sopprimere le virgole ed effettuare l'operazione; così la divisione di 15,4 per 3,7, si riduce a quella di 154 per 37.

Parimente, se il dividendo fosse intero, si scriverebbero alla sua destra tanti zeri, quante sono le cifre decimali nel divisore, e si sopprimerebbe la virgola; così la divisione di 8 per 0,25, si riduce a quella di 8,00 per 0,25, o 800 per 25.

219. La prova della moltiplicazione e della divisione dei numeri decimali, si fa come quella dei numeri interi.

Modo di valutare i quozienti in decimali.

220. Quando, dopo avere abbassato tutte le cifre del dividendo, la divisione dà un resto, noi sappiamo che il quoziente è un numero intero più una frazione (n.º 68). Ora è necessario in tutti i casi, conoscere la *frazione decimale* che completa il quoziente. Accade anche qualche volta che il dividendo è più piccolo del divisore: il quoziente allora è una frazione che bisogna sapere esprimere in *decimali*. Tali sono i due quesiti che ora risolveremo.

221. 1.º Per ottenere la frazione decimale che completa il quoziente di due numeri, *si pone primieramente una virgola dopo la parte intera del quoziente: poi si scrive uno zero alla destra del resto della divisione, e si ottiene così un nuovo dividendo parziale, che, diviso per il divisore, dà la cifra dei* DECIMI, *che si scrive al quoziente dopo la virgola.*

Se vi è un altro resto, si aggiunge uno zero alla sua destra, e si ha così un nuovo dividendo parziale: si cerca quante volte esso contiene il divisore, e il quoziente trovato è la cifra dei CENTESIMI *del quoziente.*

Se vi è un nuovo resto, si aggiunge ancora uno zero alla sua destra, e si continua così l'operazione sino a che la divisione

si faccia esattamente, o sino a che non si sono ottenute tante cifre decimali, quante ne esige il problema.

Esempio 1.° Dividere 14 per 3,2.

si scrive:		14,0 :	3,2;
e quindi		140	32
	decimi	120	4,375 quoziente esatto
	centesimi	240	
	millesimi	160	
		00	

Esaminando questa operazione, è facile di riconoscere che invece d'aggiungere successivamente tre zeri l'uno dopo l'altro alla destra di ciascun resto, saremmo giunti allo stesso resultato ponendo, avanti di cominciare l'operazione, questi tre zeri alla destra del dividendo 140, ciò che avrebbe dato il numero 140000 da dividersi per 32, e il quoziente sarebbe stato ugualmente 4375; ma scrivendo questi tre zeri alla destra del dividendo, si rende 1000 volte più grande, per conseguenza, anche il quoziente 4375, è mille volte più grande. Per ridurlo dunque al suo giusto valore, bisogna renderlo 1000 volte più piccolo, cioè separare sulla sua destra tre cifre decimali (n.° 207); il che dimostra la regola enunciata.

222. 2.° Debbasi ora effettuare una divisione nella quale il dividendo è più piccolo del divisore. A tale oggetto

Si scrive primieramente uno zero al quoziente, per occupare il posto delle unità, e una virgola alla sua destra; si opera quindi sul dividendo come sul resto di una divisione, cioè si scrive uno zero alla sua destra, seguendo la regola che abbiamo data (n.° 221) *per avere al quoziente i decimi, i centesimi, i millesimi* ec.

Esempio 2.° Debbasi dividere 4 per 25.

Operazione	
40	25 .
150	0,16
00	

Spiegazione

Il dividendo 4 non può contenere il divisore 25; si scrive uno zero al quoziente con una virgola, e si pone uno zero a destra del dividendo. Ora 40, diviso per 25, dà di quoziente 1 e per resto 15. A destra di questo resto. si scrive uno zero, e si ottiene il numero 150, che, diviso per 25, dà 6 di quoziente senza resto. Dunque il quoziente cercato è 0,16.

Infatti 25 × 0,16 = 4 unità.

La dimostrazione è analoga a quella che abbiamo fatto al n.° 221.

Quoziente approssimato.

223. Nel caso in cui una divisione di decimali non si fa esattamente, l'operazione si protrae all'infinito. Allora si dice che il quoziente è valutato *a meno d' un decimo*, (ossìa, con un errore più piccolo d' un decimo) se non si prende che la cifra dei decimi; *a meno d' un centesimo,* quando non si vogliono che due cifre decimali ec.

In pratica, l'approssimazione a meno d'un millesimo è più che sufficiente.

Esempio: Qual è il quoziente di 8,2 per 7,14 *a meno d'un millesimo?*

Si scriverà: 8,20 : 7,14;

e quindi

```
 820  | 714
1060   1,148 . . . . . .
 3460
  6040
Resto 328
```

Il quoziente è 1,148, con un errore più piccolo d' un millesimo.

224. Per ottenere un maggior grado d'approssimazione, si cerca ordinariamente una cifra decimale di più di quello che indica l'enunciato del problema, avvertendo che:

Se questa ultima cifra trovata è più grande di 5, *si sopprime, e si aumenta d'una unità l'ultima cifra decimale che si conserva; ma se questa ultima cifra è* 5, *o più piccola di* 5, *si cancella senza alterare le altre cifre decimali.*

Supponiamo che sia domandato il quoziente di 7 per 13 *a meno d'un centesimo.*

Dividendo 7 per 13, si trova per quoziente 0,538; ora la ultima cifra 8 essendo maggiore di 5, si sopprime e si aumenta d'una unità la cifra 3 dei centesimi; la frazione 0,54 esprime così il quoziente richiesto con più esattezza.

Infatti, la frazione 0,53 è troppo piccola di 8 millesimi *al meno*, mentre che la frazione 0,54 è troppo grande di 2 millesimi *al più*; dunque, prendendo per quoziente 0,54, si commette evidentemente un errore più piccolo.

ESERCIZI

LXXXI. Calcolare:

$$(16,4 : 4);\quad (98,4 : 12);\quad (816,51 : 17);$$
$$(601,6 : 9,4);\quad (14,88 : 3,2);\quad (85,2 : 38,08);$$
$$(568,632 : 15,2);\quad (0,0804 : 13,4);\quad (5 : 7);$$
$$(1027,107 : 9,81);\quad (437,632 : 83,2).$$

LXXXII. Verificare le uguaglianze:

$$39,87453 = 5,32 \times 7,495 + \frac{113}{532000}.$$
$$0,08 = 0,0027 \times 29 + \frac{17}{27}.$$
$$0,02382245 : 0,37 = 0,064385.$$
$$1114,869145005 : 0,385 = 2895,764013.$$

LXXXIII. Valutare il quoziente dei seguenti numeri *a meno* d'un decimo, d'un centesimo, d'un millesimo ec.

$$(2,9 : 7,47);\quad (3,09 : 64);\quad (5 : 37);$$
$$(8,4 : 9);\quad (3,40567 : 0,0392).$$

LXXXIV. Verificare le uguaglianze:

$$(96,5 - 0,000783) : (0,5 - 0,0003) = 193,114 \times 0,4997 + \frac{1512}{4997}.$$
$$(222,973829001 \times 5) : (0,09625 + 0,28875) = 2895,764013.$$
$$(184247,25 - 987,25) : (0,238 + 0,119 + 0,119) = 385000.$$

PROBLEMI

Sopra i numeri decimali.

111. Una persona è debitrice delle quattro somme seguenti: Lire 439,75; lire 708,60: Lire 49,08 e lire 9,96. — Quanto deve in tutto?

R. — Lire 1207, 39 c.

112. Il tesoriere d'un reggimento ha nella sua cassa le somme seguenti. Lire 8609,87; Lire 2746,40; Lire 1089,08; Lire 1300,60, e Lire 678, 20. — Qual è il totale di queste somme?

R — Lire 14424, 24 c.

113. Una cassa di zucchero costa Lire 623,80. Quanto bisogna rivenderla per guadagnarvi Lire 48,65?

R. — Lire 672, 45 c.

114. Enrico aveva Lire 10,45; egli ha fatto un'elemosina ad una povera famiglia, e gli sono rimaste Lire 3,87. — Dicasi quale elemosina ha fatto.

R. — Lire 6, 58 c.

115. Un tale era debitore di Lire 900; egli ne ha pagate 487,06. — Quanto deve ancora?

R. — Lire 412, 94 c.

116. Qual è il prezzo di 78 metri di panno, a ragione di Lire 19,75 il metro?

R. — Lire 1540, 50 c.

117. Quanto costeranno 593 chilogrammi di mercanzia, a lire 7,38 il chilogrammo?

R. — Lire 4376, 34 c.

118. Un signore spende lire 18,25 al giorno; domandasi qual somma avrà speso in 2 mesi.

R. — Lire 1095.

119. Furono spese lire 1540,50 in 78 chilogrammi di mercanzia; quanto costa un chilogrammo?

R. — Lire 19, 75 c.

120. Un operaio ha lavorato per 18 giorni, ed ha ritirato lire 58,50. — Domandasi quanto ha guadagnato per giorno.

R. — Lire 3, 25 c.

121. Qual è il numero che, moltiplicato per 5, 6, dà di prodotto 18,368?

R. — Il numero cercato è 3,28.

122. Una lira toscana equivale a 84 centesimi di lira italiana; ciò posto si domanda a quante lire toscane equivalgono lire italiane 31,08.

R. — Lire tosc. 37.

123. Verificare i resultati del seguente conto :

Spese dell' anno 1867.

INDICAZIONE dei mesi	Vitto		Fuoco e lumi		Bucato		Pigione e altre spese		Totale per mese	
Gennaio . . L.	125	35	45	25	25	00	540	00	735	60
Febbraio . ,,	136	45	57	70	33	30	125	00	352	45
Marzo . . . . ,,	198	90	32	00	17	50	136	00	384	40
Aprile . . . . ,,	142	20	24	00	29	00	560	00	755	20
Maggio . . . ,,	137	75	16	00	18	80	240	00	412	55
Giugno . . , ,,	142	30	15	00	17	70	110	00	285	00
Luglio . . . . ,,	126	60	10	70	15	90	518	50	671	70
Agosto . . . ,,	145	35	10	35	16	40	230	00	402	10
Settembre ,,	130	30	42	00	12	50	120	20	305	00
Ottobre . . . ,,	128	35	50	30	39	90	740	00	958	55
Novembre ,,	162	40	25	00	13	20	125	00	325	60
Dicembre . ,,	128	80	32	30	25	00	106	00	292	10
TOTALE L.	1704	75	360	60	264	20	3550	70	5880	25

Conversione delle frazioni ordinarie in decimali.

Condizione alla quale deve sodisfare una frazione ordinaria affinchè possa convertirsi esattamente in frazione decimale.

225. Teorema. — *Affinchè una frazione ordinaria irriducibile, possa convertirsi esattamente in frazione decimale, è necessario e sufficiente che il suo denominatore non contenga altri fattori primi che* 2 *e* 5.

1°. Questa condizione è *necessaria*.

Infatti, abbiasi la frazione irriducibile $\frac{3}{20}$, e supponiamo che possa convertirsi esattamente in frazione decimale. In questa ipotesi la frazione $\frac{3}{20}$ è uguale ad una frazione decimale, che sappiamo (n.° 208) potersi sempre porre sotto forma di frazione ordinaria, avente per denominatore una potenza di 10.

Quindi, moltiplicando i due termini della frazione $\frac{3}{20}$ per 5, potremo scrivere:

$$\frac{3}{20} = \frac{15}{100},$$

ossia

$$\frac{3}{20} = \frac{15}{10^2}.$$

Moltiplicando i due membri di questa uguaglianza per 10^2, si ha

$$\frac{3 \times 10^2}{20} = \frac{15 \times 10^2}{10^2}$$

ovvero (1)

$$\frac{3 \times 10^2}{20} = 15.$$

Ora, essendo il secondo membro 15 un numero intero, anche il primo membro $\frac{3 \times 10^2}{20}$ deve ridursi ad un numero intero; ma affinchè ciò possa verificarsi, è necessario che 20 divida il prodotto 3×10^2; ma 20 è primo con 3, dunque (vedi n.° 137) deve dividere l'altro fattore 10^2; ora 10^2, o 100, non ha per fattori primi che 2 e 5: dunque (n°. 148) anche 20 deve contenere questi fattori primi, e *non altri*. Così è dimostrata la prima parte del teorema.

2°. Questa condizione è *sufficiente*.

Infatti, sia $\frac{3}{20}$ una frazione irriducibile, il cui denominatore non contiene altri fattori primi che 2 e 5. — Si ha $20 = 2^2 \times 5$; e, per conseguenza, $\frac{3}{20} = \frac{3}{2^2 \times 5}$. — Se i fattori primi del denominatore avessero esponenti uguali, la seconda parte del teorema non avrebbe bisogno di dimostrazione, perchè allora la frazione $\frac{3}{20}$ avrebbe per denominatore una potenza di 10; ma gli esponenti dei fattori primi 2 e 5 essendo

(1) L'espressione $\frac{15 \times 10^2}{10^2}$ è uguale a 15, perchè 10^2 è fattor comune al numeratore e al denominatore.

disuguali, potranno rendersi uguali, moltiplicando per 5 i due termini della frazione $\frac{3}{2^2 \times 5}$. Avremo dunque:

$$\frac{3}{2^2 \times 5} = \frac{3 \times 5}{2^2 \times 5 \times 5} = \frac{3 \times 5}{2^2 \times 5^2}$$

$$= \frac{3 \times 5}{10^2} = \frac{15}{100} = 0{,}15,$$

con che è dimostrata la seconda parte del Teorema.

226. Corollario 1.° — *Quando una frazione ordinaria irriducibile può trasformarsi esattamente in decimale, questo numero ha tante cifre decimali, quante unità sono nell'esponente di quello dei fattori 2 e 5 che figura nel denominatore della frazione coll'esponente maggiore.*

Così, essendo $\frac{3}{40} = \frac{3}{2^3 \times 5}$, la frazione decimale, corrispondente, avrà 3 cifre decimali, perchè 3 sono le unità dello esponente maggiore. Infatti, moltiplicando i due termini dell'espressione $\frac{3}{2^3 \times 5}$ per 5^2, si ha

$$\frac{3 \times 5^2}{2^3 \times 5^2} = \frac{3 \times 25}{10^3} = \frac{75}{1000} = 0{,}075.$$

227. Corollario 2.° — Una frazione ordinaria qualunque potendosi rendere irriducibile, il teorema precedente fa sempre conoscere se essa può convertirsi in frazione decimale esattamente. Ciò avviene di rado; ma si può sempre valutare la frazione data in decimale con un errore piccolo quanto si vuole, come vedremo più sotto.

Valutazione approssimata delle grandezze e dei numeri.

228. *Valutare una grandezza, o un numero, a meno di una grandezza, o di un numero dato,* significa determinare il maggior numero di volte che la seconda grandezza è contenuta nella prima, o che il secondo numero è contenuto nel primo,

Così, valutare una *lunghezza* a meno d'un metro, significa determinare il maggior numero di metri che essa contiene. — Similmente, valutare un numero N a meno d' un numero dato n, significa trovare il massimo multiplo di n contenuto in N.

229. Quando si valuta un numero a meno di un altro numero, si ottengono in generale due limiti: uno approssimato per *difetto*, l'altro approssimato per *eccesso*, cioè uno in *meno* e l'altro in *più*.

Così, sapendo che una lunghezza è compresa fra 22 e 23 metri, questi due numeri esprimono la misura data a meno di un' unità, il primo per difetto, l' altro per eccesso.

230. *Per valutare un numero frazionario a meno di un' unità, basta prendere il numero intero che esso contiene, o l' intero immediatamente superiore.*

Così, se si ha il numero $\frac{328}{19}$, estraendo gl' interi, si ottiene $17 + \frac{5}{19}$.

Dunque il numero frazionario $\frac{328}{19}$ è compreso fra 17 e 18.

231. *Per valutare una frazione a meno di una frazione data, basta moltiplicare la prima pel deneminatore della seconda, valutare a meno di una unità il prodotto ottenuto, e dividere poi pel denominatore stesso uno dei due numeri interi consecutivi così trovati.*

Infatti, abbiasi la frazione $\frac{13}{14}$, che si vuol valutare a meno d' $\frac{1}{20}$.

Indichiamo con x il maggior numero di *ventesimi* contenuti in $\frac{13}{14}$; la frazione $\frac{13}{14}$ sarà compresa fra $\frac{x}{20}$ e $\frac{x+1}{20}$.

Ora, per determinare questo numero x, osserveremo che, se si moltiplicano per 20 le tre frazioni $\frac{x}{20}$, $\frac{13}{14}$ e $\frac{x+1}{20}$, esse conserveranno sempre le stesse relazioni di grandezza fra l'una e l' altra; avremo dunque:

$$\frac{x \times 20}{20}, \frac{13 \times 20}{14}, \frac{(x+1) \times 20}{20},$$

$$\text{ovvero } x, \quad \frac{13 \times 20}{14}, \quad x + 1;$$

dal che si vede che la frazione $\frac{13 \times 20}{14}$ è compresa fra x e $x+1$, che sono due numeri interi. Si otterrà, per conseguenza il valore d' x, prendendo l' intero contenuto nella espressione $\frac{13 \times 20}{14}$. Effettuando i calcoli indicati, si ha

$$\frac{260}{14} = 18 + \frac{8}{14}.$$

Dunque il valore d' x è 18; ossia la frazione $\frac{13}{14}$ è compresa fra $\frac{18}{20}$ e $\frac{19}{20}$.

Altro esempio. — Vogliasi il valore di $\frac{403}{588}$ a meno d' $\frac{1}{8}$.

Avremo : $\frac{403 \times 8}{588} = \frac{3224}{588} = 5 + \frac{284}{588}$.

Dunque la frazione $\frac{403}{588}$ è compresa fra $\frac{5}{8}$ e $\frac{6}{8}$.

232. Questa regola si applica alla conversione delle frazioni ordinarie in decimali.

Infatti, debbasi convertire la frazione $\frac{5}{7}$ in decimale, a *meno d' un millesimo.*

Si avrà : $\frac{5 \times 1000}{7} = \frac{5000}{7} = 714 + \frac{2}{7}$.

Dunque la frazione $\frac{5}{7}$ è uguale a $\frac{714}{1000}$, o, 0,714, a meno d' un millesimo.

In pratica però, invece di scrivere gli zeri alla destra del numeratore, e dividere il resultato pel denominatore, si scrivono gli zeri a misura che bisognano nei dividendi parziali, operando come in una divisione nella quale il dividendo è più piccolo del divisore (vedi n.° 222).

Esempio: Convertire in decimale la frazione $\frac{5}{13}$ con un errore più piccolo d' $\frac{1}{10000}$.

Operazione	Spiegazione
50 ∣ 13 110 0,3846 60 80 2	Non potendosi dividere 5 per 13, si scrive uno zero in quoziente per occcupare il posto dell'unità, e uno zero alla destra del 5. Si divide 50 per 13, e il quoziente 3 rappresenta *decimi;* scrivendo uno zero alla destra

del resto 11, si ha 110, che, diviso per 13, dà 8, che è la cifra dei *centesimi* ec.

Così si troverà che $\frac{5}{13} = 0,3846$, a meno d'un diecimillesimo.

ESERCIZI

sulla conversione delle frazioni ordinarie in decimali.

LXXXV. Convertire in decimali le seguenti frazioni ordinarie, e determinare *a priori* il numero delle cifre decimali che esse avranno:

$$\frac{7}{20};\ \frac{3}{40};\ \frac{7}{50};\ \frac{13}{160};\ \frac{3}{25};\ \frac{9}{200};$$

LXXXVI. Valutare *a meno d'un'unità* le seguenti espressioni:

$$\frac{118}{23};\ \frac{504}{19};\ \frac{1780}{333};\ \frac{1000}{99};\ \frac{37210}{423}.$$

LXXXVII. Valutare *a meno d'* $\frac{1}{12}$ le frazioni:

$$\frac{119}{213};\ \frac{568}{719};\ \frac{3428}{73}.$$

LXXXVIII. Convertire in decimali le seguenti frazioni ordinarie con un errore più piccolo d' $\frac{1}{1000}$ le prime tre; e le altre con un errore più piccolo d' $\frac{1}{10000}$.

$$\frac{3}{7};\ \frac{1}{3};\ \frac{7}{9};\ \frac{4}{11};\ \frac{3}{47};\ \frac{18}{53}.$$

LXXXIX. Verificare le uguaglianze:

$$\frac{347}{25600} = 0,0135546875.$$

$$\frac{1}{2048000} = 0,00000048828125.$$

$$\frac{47}{71000000} = 0,0000006619.$$

$$3 = 0,4285714285714\,..$$

$$\frac{15}{17} = 0,882352941176470588\;...$$

$$\frac{1}{8076934} = 0,0000001238\;...$$

Frazioni decimali periodiche.

233. Quando si valuta un quoziente in decimali, secondo le regole date al n.° 220 ec., oppure quando si converte una frazione ordinaria in frazione decimale, abbiamo visto (n.° 225 e 232) che si presentano due casi: o la divisione termina dopo un certo numero di operazioni parziali, oppure si protrae all'infinito. In quest'ultimo caso le cifre del quoziente si riproducono *periodicamente* nello stesso ordine, e, per questa ragione, è stato dato a tali quozienti il nome di *frazioni decimali periodiche.*

Abbiansi, per esempio, da convertire in decimali le frazioni ordinarie $\frac{18}{25}, \frac{13}{37}, \frac{5}{12}$.

Operazioni

180 | 25	130 | 37	50 | 12
50 0,72	190 0,351351...	20 0,4166..
0	50	80
	130	80

Nel primo esempio, l'operazione termina dopo due divisioni parziali, e dà per quoziente esatto 0,72, frazione equivalente a $\frac{18}{25}$.

Nel secondo esempio, al contrario, si vede che dopo la terza divisione parziale si ottiene per resto il numero 13 uguale al dividendo primitivo, il quale fa riprodurre nello stesso ordine le tre prime cifre del quoziente 351 e gli stessi resti; in guisa che queste tre cifre si riproducono indefinitamente. In questo caso, la frazione è *periodica*, e le cifre 351 prendono il nome di *periodo*.

Nel terzo esempio, come nel precedente, l'operazione si protrae all'infinito, perchè alla terza divisione parziale si ottiene uno dei resti precedenti; ma non essendo esso uguale al dividendo primitivo, il periodo non comincerà alla prima cifra, e si avrà 0,41666........ per la frazione decimale richiesta. In questo caso il periodo non è composto che della sola cifra 6.

Esistono dunque due specie di frazioni periodiche:

1.° *Le frazioni periodiche semplici,* nelle quali il periodo comincia alla prima cifra decimale;

2.° *Le frazioni periodiche miste,* che sono composte d'una parte non periodica e d'un periodo.

Esempio: la frazione 0, 324 324 . . . . . è periodica semplice; la frazione 0,34579579 . . . . è periodica mista. Nella prima il periodo è 324; nella seconda è 579, e le due cifre 34, che precedono questo periodo, formano la parte *non periodica*.

234. Teorema. — *Qualunque frazione ordinaria non riducibile esattamente in decimale, si trasforma in una frazione decimale periodica.*

Abbiasi la frazione ordinaria $\frac{a}{b}$, e supponiamo che non sia riducibile esattamente in frazione decimale; bisogna provare che necessariamente essa si convertirà in una frazione decimale periodica.

Infatti, dividendo a per b, secondo la regola esposta (n.°232), supponiamo di aver trovato q, q', q'', q''' . . . . per cifre decimali al quoziente, ed r, r', r'', r''' . . . . pei respettivi resti; è chiaro che se uno dei resti fosse *zero*, la frazione data si convertirebbe esattamente in decimale, ma nel nostro caso, per l'ipotesi fatta, non si giungerà mai ad un resto nullo. — Ora i resti delle divisioni parziali, essendo tutti minori del divisore b, dopo un numero di divisioni uguale al più a b—1, si ricadrà sopra uno dei resti già ottenuti, perchè non esistono che b—1 numeri

interi diversi più piccoli del divisore b; dunque i resti e i quozienti successivi saranno sempre gli stessi, e si presenteranno nel medesimo ordine; per conseguenza la frazione decimale sarà periodica; come bisognava dimostrare.

235. Corollario. — Si deduce da questo teorema che, quando una frazione ridotta in decimale, dà luogo ad una frazione periodica semplice, il numero delle cifre del periodo è minore del denominatore della frazione proposta. — Se la frazione ordinaria data si trasforma in frazione periodica mista, allora il numero delle cifre del periodo, aumentato del numero delle cifre della parte non periodica, dà una somma minore del denominatore della frazione ordinaria proposta.

Ricerca della frazione ordinaria generatrice di una frazione periodica data.

236. Chiamasi *generatrice* la frazione ordinaria che ha prodotto una frazione decimale data.

Proponiamoci ora di risolvere il seguente problema:

Data una frazione decimale, cercare la sua generatrice.

Questo problema comprende tre casi: o la frazione data è *limitata*, o è *periodica semplice*, o è *periodica mista*.

Se la frazione decimale è limitata, si trova facilmente la sua generatrice, *scrivendola sotto forma di frazione ordinaria, col darle il suo denominatore sottinteso, e riducendola quindi alla sua più semplice espressione, se è possibile*, (vedi n.° 208).

Così $0{,}375 = \frac{375}{1000} = \frac{3}{8}$; $0{,}35 = \frac{35}{100} = \frac{7}{20}$.

237. La regola per la ricerca della frazione ordinaria generatrice di una frazione decimale periodica, riposa sopra i due seguenti teoremi:

238. Teorema. 1.° — *La frazione ordinaria, generatrice di una frazione periodica semplice, ha per numeratore il periodo e per denominatore un numero composto di tanti* 9, *quante sono le cifre del periodo stesso.*

Così la frazione ordinaria, generatrice della frazione decimale periodica semplice, $0{,}727272\ldots$, sarà $\frac{72}{99} = \frac{8}{11}$.

Infatti, trasportando la virgola dopo il periodo, si avrà 72,7272 . . . , numero 100 volte più grande della frazione proposta. Se ora da questo si toglie una volta la frazione periodica data, avremo:

$$72{,}7272\ldots - 0{,}7272\ldots = 72.$$

Questo resultato è uguale a 100 volte *meno una volta* la frazione proposta, ossia è 99 volte più grande: quindi, per avere il suo giusto valore, bisognerà dividerlo per 99, ed avremo $\frac{72}{99}$, ossia $\frac{8}{11}$, che è la generatrice di 0,727272 . . . , come si può verificare, dividendo 8 per 11.

Si dimostrerebbe al modo stesso che la frazione ordinaria generatrice della frazione periodica 0,452452 . . . , è $\frac{452}{999}$.

Altra dimostrazione. — Consideriamo le frazioni $\frac{1}{9}$, $\frac{1}{99}$, $\frac{1}{999}$...

Riducendole in decimali, si ha (n.° 232).

$$\frac{1}{9} = 0{,}111\ldots;\ \frac{1}{99} = 0{,}0101\ldots;\ \frac{1}{999} = 0{,}001001\ldots$$

Dal che si deduce che in ognuna di queste frazioni periodiche il periodo è sempre formato dall' unità preceduta da tanti zeri, quante sono le cifre 9 del denominatore della frazione ordinaria corrispondente, meno una.

Ciò premesso, abbiansi le frazioni periodiche semplici

$$0{,}222\ldots;\ 0{,}3434\ldots;\ 0{,}127127\ldots$$

Dividendole pel respettivo periodo, cioè la prima per 2, la seconda per 34 e la terza per 127, avremo i quozienti

$$0{,}111\ldots;\ 0{,}0101\ldots;\ 0{,}001001\ldots;$$

e, per conseguenza,

$$0{,}222\ldots = 2 \times 0{,}111\ldots;\ 0{,}3434\ldots = 34 \times 0{,}0101\ldots;$$
$$0{,}127127\ldots = 127 \times 0{,}001001\ldots;$$

dal che si vede che *una frazione periodica semplice è uguale al prodotto del suo periodo per un' altra frazione periodica semplice, il cui periodo è formato dall' unità preceduta da tanti zeri, quante sono le cifre del periodo della frazione proposta, meno una.*

Ora, se alle frazioni 0,111...., 0,0101...., 0,001001..... si sostituiscono le frazioni corrispondenti $\frac{1}{9}$, $\frac{1}{99}$, $\frac{1}{999}$, le uguaglianze precedenti divengono

$$0{,}222... = 2 \times \frac{1}{9};\ 0{,}3434... = 34 \times \frac{1}{99};\ 0{,}127127... = 127 \times \frac{1}{999};$$

ovvero

$$0{,}222... = \frac{2}{9};\ 0{,}3434... = \frac{34}{99};\ 0{,}127127... = \frac{127}{999},$$

come bisognava dimostrare.

Se la frazione periodica è preceduta da una parte intera, si ottiene la sua generatrice togliendo questa parte intera dal numero formato dalla parte intera seguita da un periodo, e dividendo la differenza trovata per un numero formato da tanti 9, *quante sono le cifre del periodo.*

Così, la generatrice del numero decimale 52,342342... è data dall' espressione $\frac{52342 - 52}{999}$.

Infatti, il numero proposto è uguale a $52 + \frac{342}{999}$ (n.° 238.) Riducendo questa espressione in un solo numero frazionario, si ha: $52 + \frac{342}{999} = \frac{999 \times 52 + 342}{999}$, ovvero, facendo $999 = 1000 - 1$ per semplicizzare il calcolo, si ha: $52 + \frac{342}{999}$

$$= \frac{(1000 - 1) \times 52 + 342}{999} = \frac{52000 - 52 + 342}{999}$$

$$= \frac{52342 - 52}{999} = \frac{52290}{999} = \frac{5810}{111};$$ che è il numero cercato.

239. Teorema 2.° — *La frazione ordinaria, generatrice di una frazione periodica mista, ha per numeratore il numero formato dalla parte non periodica seguita da un periodo, meno il numero formato dalla parte non periodica: ed ha per denominatore un nu-*

mero espresso da tanti 9, quante sono le cifre del periodo, seguiti da tanti zeri, quante sono le cifre avanti il periodo.

Così, la frazione ordinaria generatrice della frazione periodica mista 0,23567567 . . . . , sarà data dall' espressione $\frac{23567 - 23}{99900}$.

Infatti, la frazione 0,23567567 . . . . . . , trasportando la virgola dopo la parte non periodica, è uguale a 23,567567 . . . , numero 100 volte più grande della frazione proposta.

Ora in virtù del caso precedente, si ha:

$$23{,}567567\ldots\ldots = \frac{23567 - 23}{999}.$$

Affinchè questa espressione diventi eguale alla frazione periodica data 0,23567567 . . . . . , bisognerà renderla 100 volte più piccola, il che si ottiene (n.° 164 — 2°) moltiplicando il denominatore per 100; si avrà dunque:

$$0{,}23567567\ldots\ldots = \frac{23567 - 23}{99900},$$

come bisognava dimostrare.

Effettuando la sottrazione e semplicizzando, si troverà $\frac{23567 - 23}{99900} = \frac{23544}{99900} = \frac{218}{925}$, che è la generatrice di 0,23567567 . . . . . . , come si può verificare, dividendo 218 per 925.

Si dimostrerebbe al modo stesso che la generatrice della frazione 0,31818 . . . . è uguale a

$$\frac{318 - 3}{990} = \frac{315}{990} = \frac{7}{22}.$$

Se colla frazione periodica vi è una parte intera, si ottiene la generatrice togliendo dal numero formato dalla parte intera seguita dalla parte non periodica e da un periodo, il numero formato dalla parte intera seguita dalla parte non periodica, e dividendo la differenza ottenuta per un numero formato da tanti 9 quante sono le cifre del periodo, seguiti da tanti zeri quante sono le cifre della parte decimale non periodica.

Così, la generatrice del numero decimale 679,34572572 . . sarà data dall'espressione $\frac{67934572 - 67934}{99900}$.

Infatti, dividendo il numero dato per 1000, esso si converte nella frazione 0,67934572 . . , la cui generatrice è (n.° 239):

$$\frac{67934572 - 67934}{99900000},$$

la quale è 1000 volte più piccola del numero decimale proposto; quindi moltiplicandola per 1000, col dividere per 1000 il denominatore (n.° 164 —2°), si avrà:

$$\frac{67934572 - 67934}{99900} = \frac{67866638}{99900} = \frac{33933319}{49950}$$

pel numero richiesto.

240. Le frazioni generatrici, ottenute conformemente alle due regole precedenti, godono ciascuna di una proprietà notevole:

1.° Quando la frazione è decimale periodica semplice, il denominatore della frazione generatrice non è divisibile nè per 2, nè per 5, perchè è sempre terminato dalla cifra 9.

2.ª Quando la frazione decimale è periodica mista, il denominatore è sempre divisibile per 10, inalzato ad una potenza di un grado uguale al numero delle cifre decimali non periodiche, mentre che il numeratore non è mai divisibile per 10, perchè non può terminare per zero; infatti, se ciò fosse l'ultima cifra della parte non periodica sarebbe uguale all'ultima cifra del periodo, il che è impossibile. Il numeratore non è dunque divisibile contemporaneamente per 2 e per 5.

Si possono perciò enunciare i due teoremi seguenti:

241. Teorema 3.° — *Il denominatore della frazione, generatrice d'una frazione decimale periodica semplice, non contiene nè il fattore 2, nè il fattore 5.*

242. Teorema 4.° — *Il denominatore della frazione, generatrice d'una frazione periodica mista, contiene sempre al meno uno dei fattori 2 e 5, elevato ad una potenza indicata dal numero delle cifre decimali non periodiche.*

243. Corollario 1.° — *Quando il denominatore d'una frazione ordinaria irriducibile non contiene nè il fattore 2, nè il fattore 5, questa frazione ridotta in decimale, dà origine ad una frazione periodica semplice.*

244. Corollario 2.° — *Quando il denominatore d' una frazione ordinaria irriducibile contiene l' uno dei fattori 2 o 5, o tutti e due, insieme ad altri fattori, questa frazione ridotta in decimale, dà origine ad una frazione periodica mista, nella quale il numero delle cifre decimali non periodiche è uguale al maggiore degli esponenti di 2 e di 5, contenuti nel denominatore della frazione ordinaria.*

Riepilogando ora ciò che è stato detto ai numeri 225, 234 e seguenti, si conclude che:

1.° Una frazione ordinaria irriducibile, il cui denominatore contiene i soli fattori 2 e 5, si trasforma esattamente in frazione decimale (n.° 225);

2.° Una frazione ordinaria irriducibile, il cui denominatore non sodisfa alla condizione precedente, si trasforma in frazione decimale periodica (n.° 234);

3.° Una frazione ordinaria irriducibile, il cui denominatore non contiene nè il fattore 2, nè il fattore 5, si trasforma in frazione decimale periodica semplice (n.° 243);

4.° Una frazione ordinaria irriducibile, il cui denominatore contiene uno dei fattori 2 e 5, o ambedue questi fattori insieme ad altri, si trasforma in frazione decimale periodica mista (n.° 244).

ESERCIZI

XC. Trovare le generatrici delle seguenti frazioni:

0,85; 0,084; 0,3232 . . .; 0,459459 . . .; 0,682682 . . .;
0,2727 . . .; 0,38413413 . . .; 0,31930930 . . .;
0,0583999 . . .; 0,20837837 . . .;
4.372372 . . .; 8,34283283 . . .; 4,25326326 . . .; 18,73402402.

XCI. Verificare le seguenti uguaglianze:

$$0{,}0139194139 \ldots\ldots = \frac{19}{1365},$$

$$0{,}0857142857 \ldots\ldots = \frac{3}{35}.$$

$$0{,}00056666 \ldots\ldots = \frac{17}{30000}.$$

$$0{,}0769230769 \ldots\ldots = \frac{1}{13}.$$

SISTEMA METRICO-DECIMALE

Origine del sistema metrico.

245. L'antico sistema di misure (vedi n.° 309) offriva al commercio gravi e numerosi inconvenienti. Non solo il nome, ma ancora la grandezza delle vecchie misure, cangiava secondo le località. Si concepisce dunque facilmente quali errori e quante frodi potessero risultare da questa confusa moltiplicità di misure, aventi valori e nomi diversi. Era questo un male a cui bisognava necessariamente porre un pronto rimedio. Il governo francese lo comprese pel primo, e, malgrado tutti gli ostacoli, si propose di offrire al mondo intero un sistema invariabile di pesi e misure. Dopo serii e lunghi studi cominciati nel 1791, e proseguiti col concorso di dotti di tutte le nazioni, il nuovo sistema, stabilito sopra una base fissa, fu finalmente adottato in Francia, e determinato con legge del 2 Settembre 1801 — Oggi, anche l'Italia, risente i grandi vantaggi di questo nuovo sistema.

Delle misure metriche in generale.

246. Si è dato il nome di SISTEMA METRICO alla riunione di tutte le misure, che hanno per base una certa lunghezza, chiamata METRO.

247. Il METRO, unità fondamentale di questo sistema, *è una linea eguale alla diecimilionesima parte della distanza dal polo all'equatore della terra;* si chiama *unità fondamentale*, perchè tutte le altre misure sono state formate per mezzo del metro.

248. Tutte le misure si riducono a sei, cioè: misure di *lunghezza*, di *superficie*, di *volume*, di *capacità*, di *peso*, di *moneta*.

249. UNITÀ DI MISURA DI LUNGHEZZA. — L'unità di misura di lunghezza è il METRO, che serve a misurare le linee rette e curve.

250. UNITÀ DI MISURA DI SUPERFICIE. — L'unità di misura di superficie è l'ARA. — *L'ara è un quadrato che ha* 10 *metri di lato, e* 100 *metri quadrati di superficie.* — L'ara serve di misura per le superficie *agrarie*, cioè dei campi; ma per le piccole

superficie, come quelle di una tavola, d' una stanza ec., si è adottato per unità di misura il METRO QUADRATO (1).

251. UNITÀ DI MISURA DI VOLUME. — L' unità di misura di volume è lo STERO o METRO CUBO. — *Lo stero è un cubo che ha un metro di spigolo* (2). Lo stero è specialmente destinato a misurare le legna da ardere.

252. UNITÀ DI MISURA DI CAPACITÀ. — L' unità di misura di capacità è il LITRO. — *Il litro è la capacità d' un cubo che ha un decimo di metro di spigolo.* — Il litro serve a misurare i liquidi e gli aridi, come i grani ec.

253. UNITÀ DI MISURA DI PESO. — L' unità di misura di peso è il GRAMMO. — *Il grammo è il peso dell' acqua pura contenuta in un cubo, che avesse un centesimo di metro di spigolo.*

254. UNITÀ DI MONETA. — L' unità di moneta è la LIRA ITALIANA. — *La lira italiana è una moneta pesante* 5 *grammi, e formata di nove decimi d' argento puro e un decimo di rame.*

255. Riepilogando, il sistema metrico si compone *di sei unità principali*, che sono:

1.ª Il METRO, per le misure di lunghezza.

2.ª { Il METRO QUADRATO, per le superficie.
L' ARA, per le misure agrarie.

3.ª { Il METRO CUBO, per le misure di solidità.
Lo STERO, per le misure delle legna.

4.ª Il LITRO, per le misure di capacità.

5.ª Il GRAMMO, per le misure di peso.

6.ª La LIRA ITALIANA, per le misure di moneta.

256. Questo sistema di nuove misure è chiamato *metrico*, perchè tutte le misure che lo compongono derivano dal *metro*.

Infatti, l' *Ara* deriva dal metro, perchè è un quadrato che ha 10 metri di lato e 100 metri quadrati di superficie. Lo

(1)

Si chiama *Quadrato* una superficie piana formata da quattro linee eguali e i cui angoli sono retti; ciasuna linea, come *a b*, ha il nome di *lato*.

(2)

Si chiama *Cubo* un corpo geometrico formato dalla unione di sei quadrati eguali. — Un cubo ha la forma d' un *dado da giuoco*. — Ogni linea, come A B, si chiama *spigolo* del cubo.

Stero deriva dal metro, perchè è un cubo che ha un metro di spigolo. — Il *Litro* deriva dal metro, perchè è la capacità d'un cubo, il cui spigolo ha un decimo di metro. — Il *Grammo* deriva dal metro, perchè è il peso dell'acqua pura contenuta in un cubo, il cui spigolo ha un centesimo di metro. — Finalmente, la *Lira italiana* deriva dal metro, perchè pesa 5 grammi, e il grammo è basato sul metro.

Formazione dei multipli e dei sottomultipli delle nuove misure.

257. Le misure, più grandi o più piccole dell'unità principale, sono tutte basate sul principio della numerazione decimale; così i multipli del *metro*, dell'*ara*, del *litro*, ec., sono 10 volte, 100 volte, 1000 volte più grandi dell'unità; e i sotto multipli, 10 volte, 100 volte, 1000 volte più piccoli.

258. Ciò posto, per esprimere i multipli, si è convenuto di porre innanzi al nome dell'unità principale le parole seguenti, tratte dal greco:

Deca, che significa *dieci*,
Hecto, ... *cento*,
Kilo, ... *mille*,
Myria, ... *diecimila*.

Queste parole si leggono, e si possono scrivere, così: *Deca*, *Etto*, *Chilo*, *Miria*.

259. Per le misure più piccole dell'unità, o sottomultipli, si prepongono al nome dell'unità principale le parole seguenti, tolte dal latino:

Deci, che significa *decimo*,
Centi . . . . . *centesimo*,
Milli . . . . . *millesimo*.

Per conseguenza, l'espressione *Decàmetro*, significa 10 metri; *Decàlitro*, 10 litri; *Decagràmmo*, 10 grammi; *Decàstero*, 10 steri. — *Ectòmetro*, o *Ettòmetro*, esprime 100 metri; *Ettogrammo*, 100 grammi; *Ettòlitro*, 100 litri. — L'espressione *Kilòmetro*, o *Chilometro*, significa 1000 metri; *Chilogrammo*, 1000 grammi. — *Myriàmetro*, o *Miriàmetro*, 10000 metri; Miria-

grammo, 10000 grammi, ec. — Reciprocamente, l'espressione *Decìmetro,* esprime la decima parte del metro; *Decìstero,* la decima parte dello stero; *Decigràmmo,* la decima parte del grammo, ec. — *Centìmetro,* la centesima parte del metro; *Centigràmmo,* la centesima parte del grammo. — *Millìmetro,* la millesima parte del metro, ec.

Lettura e scrittura dei numeri del sistema metrico.

260. Poichè i multipli e i sottomultipli delle unità metriche sono intieramente basati sulla numerazione decimale, sarà facile leggere e scrivere un numero qualunque esprimente una misura nuova, conformandosi alle regole date pei numeri decimali (vedi n. 198 e 199 ec.)

Esempio. — Abbiasi il numero 3782*met.*, 15.

Si potrebbe enunciare così: 3 *chilometri,* 7 *ettometri,* 8 *decametri,* 2 *metri,* 1 *decimetro,* 5 *centimetri.* Ma questo modo di enunciare il numero sarebbe molto lungo: è perciò che in pratica si tiene la regola dei numeri decimali, cioè: *si enuncia prima la parte intera a sinistra della virgola col nome dell'unità che si vuole adottare; poi si enuncia la parte decimale, dandole il nome dell' unità indicata dal posto dell' ultima cifra.* — Così il numero proposto si legge: *Tremila settecento ottantadue* METRI *e quindici* centimetri.

Abbiasi ancora il numero 358*lit.*, 6.

Diremo: 358 *litri* e 6 *decilitri.*

Volendo adottare il decalitro per unità, il numero si leggerebbe: 35 *decalitri* e 86 *decilitri.*

Se invece si volesse per unità l'ettolitro, si direbbe: 3 *ettolitri* e 586 *decilitri*; o meglio: 3 *ettolitri,* 58 *litri* e 6 *decilitri.*

261. Da ciò che precede resulta, che per mezzo del trasportò della virgola, si può facilmente convertire l' unità principale in multipli o in sottomultipli, secondo che la virgola si trasporta verso sinistra, o verso destra. Così per convertire 6348*met.*, 5 in chilometri, basta avanzare la virgola di tre posti verso sinistra, e si ha 6*chilom.* , 3485. Infatti, ridurre in chilometri, vale dividere per 1000; e per divider per 1000 un numero decimale, è sufficiente avanzare la virgola di tre posti verso sinistra (n.° 207.)

Quando il numero delle cifre, necessarie al trasporto della virgola, non basta, si supplisce con zeri. — Per esempio, volendo convertire in grammi il numero 3*chilogr.*, 6, si dovrà avanzare la virgola di tre posti verso destra; e poichè non vi è che una cifra, si scriverà 3600 grammi, aggiungendo due zeri alla destra del numero. — Parimente, per convertire 28 grammi in chilogrammi, si scriverà 0*chilogr.*, 028, perchè la virgola, che è dopo i grammi, deve esser portata tre posti più a sinistra.

262. Per scrivere un numero appartenente al sistema metrico, si terrà la stessa regola che per i decimali (n.º 200), cioè *si scrive subito la parte intera, poi una virgola, e alla sua destra la parte decimale, avvertendo che l' ultima cifra sia al posto che indica l' enunciato*; *si sostituiscono con zeri le unità intermediarie che mancano.* — Così:

Per 258 metri, 35 centimetri, *si scriverà.* 258*m.*, 35.
Per 7 are, 6 centiare, ... 7*ar.*, 06.
Per 136 grammi, 27 milligram. , . . 136*gr.*, 027.
Per 18 millimetri, ... 0*m.*, 018.
Per 3 centigrammi . . . . 0*gr.*, 03.
Per 7 decisteri, ... 0*st.*, 7.

Ma se i numeri sono enunciati col nome dei multipli e dei sottomultipli, bisognerà rammentarsi che la parola *myria*, significando diecimila, la cifra che la rappresenta deve trovarsi nel posto delle diecine di migliaia; la cifra che rappresenta i *kilo*, nel posto delle migliaia, quella che esprime gli *ecto* nel posto delle centinaia; quella che rappresenta i *deca*, nel posto delle diecine; quella dei *deci*, nel posto dei *decimi* dopo la virgola; quella dei *centi*, nel posto dei centesimi, e quella dei *milli*, nel posto dei millesimi.

Esempio. — Debbasi scrivere 6 *chilogrammi*, 7 *ettogrammi* 4 *decagrammi*, 8 *grammi*, 3 *decigrammi ; si scriverà :*

6748*gr.*, 3.

Se si avesse il numero 27 *chilometri*, 6 *metri*, 25 *millimetri*, si scriverebbe :

27006*m.*, 025,

sostituendo con zeri gli *ettometri*, i *decametri* e i *decimetri* che mancano nell' enunciato.

263. Nella scrittura dei numeri del sistema metrico, è bene adottare per unità principale l' unità semplice, cioè il *Metro*, il *Litro*, l' *Ara*, lo *Stero*, il *Grammo*, di maniera che il posto della virgola sia sempre lo stesso. — Così:

Per 28 ettolitri, 26 decilitri, *si scriverà*. 2802*lit*, 6.
Per 254 chilomet., 8 decametri, . . . 254080*m*.
Per 12 miriagram., 16 gram; . . . . 120016*gr*.

ESERCIZI

Sulla lettura e scrittura dei numeri del sistema metrico.

XCII. Leggere i numeri seguenti:

3*chilogr.*, 047 — 0*m.*, 808. — 545*ettol.*, 05. — 83*st.*, 04. — 14*gr.*, 07. — 12*m.*, 101. — 103*chilom.*, 7. — 17*lit.*, 46. — 7*ettol.*, 05. — 3*gr.*, 18. — 53*lit.*, 8. — 119*m.*, 006. — 0*lit.*, 49. — 12*ettogr.*, 275. — 25 *ettare*, 43. — 0*are*, 12. — 0*gr.*, 128. — 40*decal.*, 0107. — 164*m.*, 017. — 0*are*, 04. —

XCIII. Convertire in *grammi* il numero 3*chilogr.*, 047.
—— in *litri* . . . . 545*ettol.*, 05.
—— in *metri* . . . . 103*chilom.*, 95.
—— in *are* . . . . 7*ettare*, 15.
—— in *chilogr* . . . . 4784*gr.*, 15.
—— in *ettolitri* . . . . . . 1608*lit.*, 7.
—— in *decasteri* . . . . . . 780*st.*, 15.
—— in *chilometri* . . . . . 1780*met.*
—— in *ettogram* . . . . . . 459*gr.*, 7.

XCIV. Scrivere in cifre i numeri seguenti:

Tre ettogr. cinque decagram. due grammi. — Ventisei decalitri, nove litri. — Otto decametri, sette decimetri. — Cinquantanove ettolitri, tredici litri, tre centilitri. — Quarantacinque grammi, ventun milligr. — Centonovanta decasteri, tre steri. — Quarantadue metri, diciannove millimet. — Trentacinque centiare. — Centocinque millimetri. — Trecentoventi decasteri, tre steri, due decisteri. Tremila ottocento sette centiare. Novecento sessantadue metri, quattro centimetri. — Tre chilogr. due ettogr. quindici grammi. — Dodici ettometri, tre decamet. sette metri. — Ottanta chilogr. quindici centigrammi.

Calcolo delle misure metriche.

264. Il calcolo delle misure metriche è lo stesso di quello dei numeri decimali (vedi n.° 210, 211 ec.); ma avanti d'effettuare una operazione, bisogna avvertire di ridurre le misure *alla medesima unità;* vale a dire, fare in modo, che la virgola sia dopo l'unità semplice, il *metro,* il *litro,* l'*ara, il grammo* e lo *stero;* e pei numeri molto grandi, adottare di preferenza per unità il *chilometro* e il *chilogrammo.*

ESEMPI.

Addizione.

1.° 15*ettol.*, 006 + 37*lit.*, 52 + 7*decal.*, 07 + 14*ettol.*, 37.

Riducendo in litri (n.° 261), si avrà:

Lit.	1500, 6
«	37, 52
«	70, 7
«	1437
Totale: Lit.	3045, 82 = 30*ettol.*, 45*lit.*, 82*centil.*

2.° 3*ettog.*, 15 + 7*chilog.*, 140 + 8*gr.*, 14 + 12*decag.*, 87.

Riducendo in grammi, avremo:

Gr.	315
«	7140
«	8, 14
«	128, 7
Totale: Gr.	7591, 84 = 7*chil.*, 5*ettog.*, 9*decagr.*, 1*gr.*, 84*centig.*

Sottrazione.

3.° Da 15*chilogr.*, 7*decigr.* levare 97*gr.*, 15*centigr.*

Riducendo in grammi, avremo :

Gr. 15000, 7

« 97, 15

Resto : Gr. 14903, 55 = 14*chilogr.*, 9*ettog.*, 3*gr.*, 55*centigr.*

4.° Da 18*decast.*, 15*centist.*, levare 87*ster.*, 3*decist.*

Riducendo in steri, si ha :

St. 180, 15

« 87, 3

Resto : St. 92, 85 = 9*decast.*, 2*st.*, 85*centist.*

Moltiplicazione.

5.° Si domanda la superficie di 14 pezzi di terra, aventi ciascuno 5*ettar.*, 6*are*, 42*centiare.*

È chiaro che si dovranno ripetere 14 volte 5*ettare*, 6*are*, 42*centiare*, ovvero, riducendo in are, moltiplicare 506*are*, 42 per 14.

Avremo dunque :

Are 506,42

14

2025 68

5064 2

Superficie : Are 7089,88 = 70*ett.*, 89*are*, 88*cent.*

6.° Valutare 15*ettol.*, 3 *lit.* di vino, a Lire 1, 15 c. il litro.

Poichè 1 litro costa L. 1,15, 15*ettol.*, 3*lit.*, o 1503 litri, costeranno 1503 volte Lire 1,15; bisogna dunque ripetere Lire 1,15 1503 volte, cioè moltiplicare L. 1,15 per 1503, oppure 1503 per 1,15, rammentandosi che il prodotto esprimerà *lire* (n.° 48 — 3°, o n° 55).

Avremo dunque :

Lit. 1503

1,15

7515

1503

1503

Costo : Lire 1728,45 centesimi.

Divisione.

7.° Si sono spese Lire 1728,45 c. in 15*ettol.*, 3*lit.*, di vino; quanto costa un litro?
Poichè si vuole il prezzo d'un litro, bisognerà ridurre 15*ettol.*, 3*lit.* in litri, e si avrà:

1728,45	Litr. 1703
225 4	Lire 1,15 c.
75 15	
00 00	

Quoziente, o costo d'un litro: Lire 1,15 c.

8.° Si domanda, *a meno d'un centesimo,* il peso d'una botte di zucchero, sapendo che 7 botti della medesima capacità, pesano insieme 736*chilogr.* 24*decagr.*

Avremo:	Chilogr. 736,24	Botti 7,00
	3624	Chilogr. 105,17
	1240	
	5400	
	500	

Il quoziente, o peso cercato, è 105*chilogr.*, 17*decagr.*

PROBLEMI

Sul calcolo delle misure metriche.

Addizione.

124. Si hanno due corde: l'una di 15*m.*, 73 centim. di lunghezza, l'altra di 12*m.*, 3 decimet.; si domanda la lunghezza delle due corde riunite estremità ad estremità.

R. — Lunghezza totale: 28*m.*, 03*centim.*

125. Quattro artigiani lavorano insieme e fanno in una settimana, il 1.° 36*m.*, 54 di lavoro; il 2.° 43*m.*, 3; il 3.° 5*m.*; il 4.° 61*m*, 9 — Quanti metri hanno fatto in tutto?

R. — 146*m*, 74.

126. Un viaggiatore ha fatto il 1.° giorno 18 chilometri di cammino, l'indomani 13*chilom.* 7*ettom.*, e il 3.° giorno tanti, quanti i giorni precedenti — Si vuol sapere il cammino che ha fatto nei tre giorni.

R. — 63*chilom.*, 4*ettom.*

127. Vi sono in un magazzino cinque masse di legna, di cui l'una contiene 652*st.*, 6; la seconda 348*st.*, 8, la terza 409*st*, 9, la quarta 520*st.*, 3, e la quinta 136*st*, 8. — Quanti steri di legna sono in questo magazzino?

R. — 2068*steri*, 4*decist.*

128. Un facchino porta sopra una carretta 4 balle, di cui una pesa 86*chil.* 7*decagr.*; un'altra, 120*chilogr.*, 162*gr.*; una terza, 151*chil.*; e la quarta, 135*chil.* 8*decagr.* — Dire qual è il peso totale del carico.

R. — 492*chil.*, 312*gr.*

129. Un proprietario affitta a diversi particolari le seguenti porzioni di terra: un prato di 31*are*, 50*cent*; una vigna di 1*ettara*, 2*ar.*, 14*cent.*; un giardino di 62*are*, più un pezzo di terra di 2*ettar.*, 15*are*, 7*cent.* — Si domanda il numero totale di ettare, are, e centiare.

R. — 4*ettar.*, 10*ar.*, 71*cent.*

130. Un oste ha venduto in una settimana 6 botti di vino; l'una di 1*ettol.* 16*lit*, 5*decil.*; la 2.ª di 133*lit.*, 07; la 3.ª di 1*ettol*, 38*lit*; la 4.ª di 2*ettol.*, 1*lit.*, 30*centil.*; la 5.ª di 147*lit.*, 9; la 6.ª di 97*lit.* — Quanti litri ha venduto in tutto?

R. — Ha venduto 833*lit*, 77*centil.*

Sottrazione.

131. Una pezza di velluto aveva 16*m.*, 35 di lunghezza; se ne sono venduti 13*m*, 4; quanto ne è rimasto?

R. — 2*m.*, 95*centim.*

132. Un mercante riceve una cassa di mercanzia pesante 23*chilogr.*, 9*decagr.*, la cassa pesa 2*chilogr.*, 125*gr.*; qual è il peso della mercanzia?

R. — Peso: 20*chil*, 9*ettogr.*, 6*decagr.*, 5*gr.*

133. La statura di Paolo è di 1*m.*, 17; quella d'Alfredo è di 1*m.*, 39; quale de' 2 è il più grande, e di quanto sorpassa l'altro?

R. — Alfredo è più alto di Paolo di 0*m.*, 22.

134. Un mercante aveva 248*steri* di legna; ne vende 150*st.*, 4; quante gliene resta?

R. — 97*st.*, 6*decist.*

135. La moneta d'argento di 5 lire pesa 25*grammi*; la moneta d'oro di 50 lire pesa 16*gr.*, 129. — Qual'è la differenza in peso e in valore?

R. — In peso: 8*gr.* 871. — In valore: lire 45.

136. Un contadino è costretto a zappare un campo di 15*ettare*, 7*are* di superficie; alla fine d'alcuni giorni vuol sapere a qual punto sia il suo lavoro, e trova che ha zappato 63*ar*. 58. — Si domanda qual è il lavoro che gli resta.

R. — 14*ettar.*, 43*ar.*, 42*centiare.*

137. Si hanno tre regoli di ineguale lunghezza; l'uno di 75*centimetri*, l'altro di 3*decimetri*, e il terzo di 1*m*, 09. — Quanto bisognerebbe aggiungere al secondo e togliere dal terzo per renderli eguali in lunghezza al primo?

R. — Al 2.° bisognerebbe aggiungere 45*centim.*; dal 3.° bisognerebbe togliere 34*centim.*

Moltiplicazione.

138. Qual è il prezzo di 11*m*, 4 di nastro, a ragione di lire 0,45 c. il metro?

R. — Costo: Lire 5, 13 c.

139. Qual somma si deve pagare per 35*chilogr.*, 7*decagr.* d'una mercanzia, se il chilogr. costa Lire 2,45?

R. — Lire 85, 92 c.

140. Se un litro di vino costa 20*centesimi*, quanto si spenderà in 142*lit.*, 17?

R. — Lire 28, 43 c.

141. Un tale compra 3*ettare*, 68*are* di terreno, a ragione di Lire 89 l'ara; domandasi il prezzo del suo acquisto.

R. — Lire 32752.

142 Un lavorante ha fatto per conto d'un possidente 15 giornate di lavoro al prezzo di lire 2, 35 c. la giornata; quanto ha guadagnato?

R. — Lire 35, 25 c.

143. Un mercante ha fornito ad un ospizio 547*m.*; 8 di tela, al prezzo di lire 3, 15 c. il metro; qual'è la spesa di questa fornitura?

R. — Spesa. Lire 1725, 57 c.

144. Nella divisione di una proprietà si fanno 5 lotti uguali di 73*are*, 18 ciascuno; qual'era la superficie totale avanti la divisione?

R. — Superficie: 365*are*, 90*centiare*.

145 Il mantenimento delle strade d'un comune è di 18*centesimi* per metro quadrato; se si suppone che vi sieno 55762 metri quadrati da mantenere in questo comune, a quanto ascende la spesa?

R. — Spesa: Lire 10037, 16 c.

146. Un mercante ha nella sua cantina due qualità di vino, di cui l'una di 154*lit.*, 9 è costata 25*centes.* il litro, e l'altro, di 166*lit*, 3, è costata 48*centes.* il litro. — Si domanda qual somma è stata necessaria per pagare queste due qualità di vino.

R. — Lire 118, 54 c.

147. Un mercante ha fornito ad un rivenditore 47 pani di zucchero, di cui 38 pesano 3*chilogr.*, 05 ciascuno e 9 pesano 2*chilogr.*, 29 ciascuno. Il prezzo del chilogr. era di Lire 2, 27; si vuol conoscere il peso e la spesa di questa fornitura.

R. — Peso: 136*chilogr.*, 51*decagr.*

Prezzo: Lire 309, 88 c.

148. S'impiegano 15 lavoranti, di cui 6 si pagano a ragione di Lire 2, 63 c ciascuno per giorno, e gli altri a Lire 3, 45 c. I primi hanno fatto 17 giornate ciascuno, gli altri 14 giornate. Qual somma occorre per pagare tutte le giornate?

R. — Lire 702, 96 c.

149. Sopra una via ferrata la velocità d'una locomativa è stata di 11*m.*, 37 per secondo, e il tragitto è stato fatto in 23 minuti. — Qual'era la lunghezza della strada?

R. — 15*chilom.*, 6*ettom.* 90*m*, 60*centim.*

150. Si vuol sapere il costo del mantenimento di 3 cavalli per 27 giorni. Si sa che la razione giornaliera d'ogni cavallo è di 9*chilogr.* di fieno, 4*chilogr.* di paglia, 2*lit.*, 62 d'avena; e che il fieno costa Lire 0,09 c. il chilogr., la paglia Lire 0, 06 c, e il litro d'avena Lire 0, 11 c.

R. — Lire 108, 39 c.

Divisione.

151. Si sono pagate Lire 19, 50 c. per 5 chilogr. di mercanzia: quanto costa un chilogr.?

R. — Lire 3, 90 c

152. Si sono seminati 9*decalit.*, 6*decilit.* d'orzo in un terreno di 2*ettare*, 6*are* di superficie: si domanda quanto n'è bisognato per ogni ara.

R. — 44 centilitri circa.

153 Un vetturale ha portato 751*steri*, 2*decist.* di legname in un carro che contiene 2*st*, 4*dec.* — Quanti viaggi ha egli fatto?

R. — Ha fatto 313 viaggi.

154. Un oste aveva nella sua cantina 5*ettol.*, 63*lit.* di vino, che ha esitato nello spazio d'11 giorni. — Si domanda quanto ne ha venduto per giorno.

R. — Ne ha venduto 51*lit*, 18*centil.*

155. Un possidente che ha raccolto 4873*chilogr.* d'uva, vuol conoscere la quantità di vino che potrà ricavarne, sapendo che 200*chilogr.* d'uva fanno 1*ettol.* di vino.

R. — Avrà 24*ettol.*, 36*lit.*, 5*decil.* di vino.

156. Un militare, obbligato di raggiungere il suo reggimento, deve fare 187*chilom.* di strada in 13 giorni. — Quanta dovrà farne per giorno?

R. — Dovrà farne 14*chilom*, 384*met.* circa.

157. La luce ci viene dal sole in 8 minuti, 13 secondi, e percorre in questo tempo circa 34600000 $\times$ 4444 metri. — Si vuol sapere qual'è la sua velocità per secondo. (Ridurre prima i minuti in secondi.)

R — La luce percorre in un secondo:

311891277*m.*, 8904 . . . . . . , o 311891*chilom*, 278*met.* circa.

158 La velocità d'una palla da 24 all'uscire dal pezzo, è di 500 metri per secondo: qual tempo impiegherebbe, conservando la stessa velocità, per giungere alla luna, la cui distanza dalla terra è di 86000 $\times$ 4444 metri?

R. — V'impiegherebbe 764368 secondi, o 9 giorni circa.

MISURE METRICHE IN PARTICOLARE.

265. Abbiamo esposto la nomenclatura delle nuove misure; abbiamo insegnato il modo di leggere e di scrivere i numeri di questo sistema, non che la maniera di calcolarli; ci resta ora a conoscere le diverse misure in uso nel commercio, e di cui la legge ha fissato il numero, la forma e le dimensioni.

I dotti che hanno inventato il sistema metrico hanno stabilito le misure *effettive* (1) sul principio seguente:

266. *Tutte le misure effettive devono essere eguali* 1.° *ad una volta, due volte e* 5 *volte l'* UNITÀ SEMPLICE; 2.° *ad una volta, due volte e cinque volte il* DECA; 3.° *ad una volta, due volte e cinque volte l'* ETTO; 4.° *ad una volta, due volte e cinque volte il* CHILO.

E le misure più piccole dell'unità, devono essere uguali 1.° *ad una volta, due volte, e cinque volte il* DECI; 2.° *ad una volta, due volte e cinque volte il* CENTI.

MISURE DI LUNGHEZZA.

Del metro.

267. *Il* METRO *è l'unità di misura di lunghezza.* — Abbiamo già detto che il metro è una linea uguale alla diecimilionesima parte della distanza dal polo all'equatore terrestre.

(1) Le misure *effettive* sono quelle che esistono effettivamente pei bisogni delle scienze o del commercio. La legge sottomette le misure effettive all'esame del verificatore.

268. Divisioni o sottomultipli del metro. — Il metro si divide in 10 *decimetri*, ogni decimetro in 10 *centimetri*, e ogni centimetro in 10 *millimetri*.

269. Multipli del metro, — I multipli del metro sono il *decametro*, uguale a 10 metri; l'*ettometro*, uguale a 100 metri; il *chilometro*, uguale a 1000 metri e il *miriametro*, uguale a 10000 metri. Uu miriametro contiene dunque 10 chilometri, un chilometro 10 ettometri, un ettometro 10 decametri, e un decametro 10 metri. — Il miriametro, il chilometro e l'ettometro sono chiamate misure *itinerarie*, e sono destinate a misurare le distanze geografiche.

270. Ecco le misure effettive di lunghezza autorizzate dalla legge:

1.° *Il doppio decametro*, cioè	20	metri.
2.° *Il decametro*, ...	10	metri.
3.° *Il mezzo decametro*, . .	5	metri.
4.° *Il doppio metro*, ...	2	metri.
5.° Il metro, ...	1	metro.
6.° *Il mezzo metro*, ...	5	decimet.
7.° *Il doppio decimetro*, . .	2	decimet.
8.° *Il decimetro*, ...	1	decimet.

Da ciò si riconosce il principio del n.° 266; infatti, non si vedono che i divisori 1, 2, e 5.

ESERCIZI.

XCV. Esprimere in cifre la lunghezza di *ottocento quarantadue milioni trecentomila duecento quarantotto millimetri*, prendendo per unità di misura: 1.° il metro; 2.° l'ettometro; 3.° il decimetro; 4.° il chilometro, ec.

XCVI. Ridurre *metri* 87768423, 70 — 1.° in decimetri; 2.° in centimetri; 3.° in decametri; 4.° in ettometri; 5.° in chilometri.

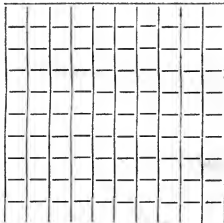
MISURE DI SUPERFICIE.

Del metro quadrato.

271. Il Metro quadrato *è l'unità principale delle misure di superficie.* — Il metro quadrato è un *quadrato* che ha 1 metro di lato.

Abbiamo veduto (n.° 250) che il metro quadrato serve a misurare le piccole estensioni, come la superficie d'un muro, d'una tavola, d'un pavimento ec.

272. Divisione del Metro quadrato. — Il metro quadrato si divide in 100 *decimetri quadrati*, come si vede nella figura qui accanto; il decimetro quadrato si suddivide in 100 *centimetri quadrati*; il centimetro quadrato in 100 *millimetri quadrati.* — Dunque un metro quadrato contiene 100 decimetri quadrati, 10000 centimetri quadrati, 1000000 millim. quad.

273. Da ciò si vede che le misure di superficie sono di *cento in cento* volte più piccole, mentre le misure di lunghezza non lo sono che di *dieci* in *dieci* solamente. Infatti, la figura qui sopra mostra che le superficie dei quadrati divengono 100 volte più piccole, quando i lati sono dieci volte minori.

274. Per conseguenza, *per leggere un numero esprimente metri quadrati, si enunciano prima i metri quadrati a sinistra della virgola, poi si legge la parte frazionaria, prendendo le cifre decimali* DUE *a* DUE, *e dando il nome di* DECIMETRI QUADRATI *alle due prime cifre dopo la virgola: il nome di* CENTIMETRI QUADRATI *alle due cifre seguenti*, ec.

Esempio: Il numero 28*m. q.*, 4572, si leggerà: 28 *metri quadrati*, 45 *decimetri quadrati*, 72 *centimetri quadrati.*

Se il numero delle cifre decimali fosse impari, si porrebbe uno zero alla destra della frazione.

Così 0*m. q.*, 27563, si leggerebbe: 27 *decimetri quadrati*, 56 *centimetri quadrati*, 30 *millimetri quadrati*.

275. Reciprocamente, *per scrivere un numero esprimente la misura d'una superficie, si scriveranno prima i metri quadrati, poi si porrà una virgola, e alla sua destra i decimetri quadrati, centimetri, quadrati ec., rammentandosi che sono necessarie due cifre pei decimetri, due pei centimetri ec., e avvertendo di porre uno zero, quando non vi sono diecine nell'una delle suddivisioni.*

Esempio: Per indicare una superficie di 4 *metri quadrati*, 8 *decimetri quadrati*, 17 *centimetri quadrati*, si scriverà:

4*m. q.*, 0817.

Parimente, dovendo esprimere una superficie di 8 *metri quadrati*, 5 *centimetri quadrati*, si scriverà: 8*m. q.*, 0005.

276. Per valutare una superficie non esistono *misure effettive:* bisogna dunque ricorrere alla Geometrìa, la quale insegna a trovare in metri quadrati l'estensione d'una superficie qualunque per mezzo di semplici linee rette (1). E, poichè i limiti d'un trattato d'Aritmetica non permettono di esporre la maniera d'ottenere queste diverse misure, ci contenteremo d'indicare qui come si calcola la superficie del *quadrato* e quella del *rettangolo* (2).

1.° *Si ottiene la misura d'un quadrato, moltiplicando il suo lato per sè stesso.*

Così, la superficie d'una stanza quadrata, che ha 5*m.* di lato, sarà uguale a $5 \times 5 = 25$*m. q.* — Se il lato fosse di 3*m.*, 25, si avrebbe la sua superficie, moltiplicando 3*m*, 25 per 3*m.*, 25, o $3{,}25 \times 3{,}25 = 10{,}5625$; vale a dire 10 *metri quadrati*, 56 *decimetri quadrati*, 25 *centimetri quadrati*.

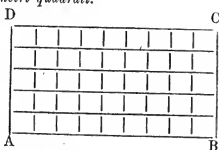
2.° *Si ottiene la misura d'un rettangolo, moltiplicando la sua lunghezza per la sua larghezza.*

Così, per ottenere la superficie d'un muro rettangolare, che ha 9 metri di lunghezza e 5 di larghezza, si avrà 9×5

(1) Vedi la *Geometria pratica* dello stesso autore.

(2) Il *Rettangolo* è una figura geometrica, composta di quattro angoli retti e quattro lati, uguali due a due. — Vedi la figura alla pag. seguente.

$= 45 m. q.$ — Se la lunghezza fosse di 1*m.*, 27 e la larghezza di 0*m.*, 6, la sua superficie sarebbe $1{,}27 \times 0{,}6 = 0{,}762$; cioè 76 *decimetri quadrati*, 20 *centimetri quadrati*.

Infatti, sia il rettangolo ABCD, e supponiamo che la base AB sia 9 metri e l'altezza DA 5 metri. Se dai punti di congiunzione dei diversi metri si conducono delle perpendicolari, si sarà divisa la superficie del rettangolo in $9 \times 5 = 45$ metri quadrati. La stessa dimostrazione si applica anche al quadrato.

D C A B

(Vedi i Problemi 159, 160 ec.).

ESERCIZI.

XCVII. Leggere i numeri seguenti:

15*m. q.*, 68. — 3*m. q.*; 8426. — 4*m. q.*, 89374. — 2*m. q.*, 782. — 0*m. q.*, 76045. — 0*m. q.*, 005.

XCVIII. Scrivere in cifre i numeri seguenti:

Sette met. quad., diciotto decimet. quad., settantacinque centim. quad. — Ventotto met. quad., sessantatre decimet. quadrati, otto centim. quad. — Centoventi met. quad., sette decimet. quad. — Diciotto decimet. quad., due centim. quad. — Cinquanta centim. quad., dieci millim. quad.

XCIX. Ridurre metri quad. 8976348, 808, 1.° in decim. quad. — 2.° in centim. quad. — 3.° in decamet. quad. — 4.° in ettom. quad. — 5.° in chilom. quad.

Dell'Ara.

277. *L'*Ara *è l'unità di misura per le superficie agrarie.* — *L'Ara* è un quadrato che ha 10 metri di lato e 100 metri quadrati di superficie.

278. Le misure agrarie sono tre: l'*Ettara*, uguale a 100 are, o 10000 met. quad.; l'*Ara*, uguale a 100 met. quad.; la *Centiara*, uguale a 1 met. quad.

279. Segue da queste definizioni: 1.° che per convertire in Are una superficie espressa in metri quadrati, basta avanzare la virgola di due posti verso la sinistra, il che equivale a dividere il numero per 100. — Così, 548 met. quad. sono eguali a 5 are, 48 centiare. — 2.° Per ridurre in ettare, are e centiare un numero di metri quadrati, basta ricordarsi che sono necessarie due cifre per rappresentare le are, e due per le centiare. — Così, 17503 met. quad. equivalgono ad 1 ettara, 75 are e 3 centiare (Vedi i Probl. 163, 164, 165. ec.)

280. Resulta da ciò che precede che le tre misure agrarie sono quadrati, i cui lati hanno 1 metro per la *centiara*, 10 metri per l'*ara*, e 100 metri per l'*ettara*. Ma le superficie sono di cento in cento volte più grandi, mentre che i lati sono solamente di dieci in dieci volte più grandi. (n.° 273.)

ESERCIZI.

C. Ridurre in are e centiare i numeri seguenti :

384*m. q.*; 1283*m. q.*; 16834*m. q.*. 70732*m. q.*

CI. Convertire in ettare, are e centiare i numeri:

48614*m. q.*; 373824*m. q.*; 832678*m. q.*, 37.

MISURE DI VOLUME.

281. *L'unità principale delle misure di volume è il* Metro cubo. — Il metro cubo è un *Cubo* che ha un metro di spigolo vale a dire, un metro di lunghezza, di larghezza e di grossezza.

282. Divisioni del Metro cubo. — Il metro cubo si divide in 1000 *decimetri cubi;* il decimetro cubo in 1000 *centimetri cubi;* il centimetro cubo in 1000 *millimetri cubi.* — Un metro cubo contiene dunque 1000 decimet. cubi, 1000000 di centim. cubi, e 1000000000 di millim. cubi.

283. Da ciò si vede che i cubi sono di *mille* in *mille* volte più piccoli, quando lo spigolo diviene soltanto di *dieci* in *dieci* volte più piccolo.

284. Per conseguenza, *per leggere un numero esprimente la misura d'un volume in metri cubi, bisogna enunciare i metri cubi*

posti a sinistra della virgola, poi la frazione decimale, decomponendola in gruppi di TRE *cifre ciascuno, e dando al primo gruppo la denominazione di* DECIMETRI CUBI, *al secondo quella di* CENTIMETRI CUBI, *al terzo quella di* MILLIMETRI CUBI.

Così, il numero 2*m. cub.*, 105231 si enuncia: 2 *metri cubi,* 105 *decimet. cubi,* 231 *centim. cubi.*

Se il numero dei decimali non permette di dividere la frazione in gruppi di tre cifre, si pongono alla destra di essa uno o due zeri.

Esempio: Sia il numero 16*m. cub.*, 4236. — Per leggerlo bisogna prima scriverlo così: 16*m. cub.*, 423600; quindi si dirà: 16 *metri cubi,* 423 *decimet. cubi,* 600 *centim. cubi.*

285. Reciprocamente, *per scrivere un numero esprimente la misura d'un volume, è d'uopo ricordarsi che sono necessarie, dopo i metri cubi, alla destra della virgola, tre cifre per rappresentare i decimetri cubi, tre cifre pei centimetri cubi, e tre per i millimetri cubi.*

Esempio: per indicare il volume d'un corpo che avesse 4 *metri cubi,* 18 *decimetri cubi,* 8 *centimetri cubi,* si scriverebbe: 4*m. cub.*, 018008, avvertendo di sostituire con zeri le unità, le diecine e le centinaia che mancano nello suddivisioni.

286. Molti sono gli usi del metro cubo; esso serve particolarmente a valutare i lavori di fabbriche e di terrapieni, come i volumi dei monti di sabbia o di pietre, i volumi dei muri, il legname da costruzione ec.

287. È la Geometrìa che insegna a trovare quanti metri cubi o frazioni di un metro cubo contiene un dato volume (1.) Ci limiteremo qui a far conoscere il mezzo di calcolare il volume d'un *cubo* o *d'un corpo terminato da superficie quadrate o rettangolari.*

1.° *Si determina il volume d'un cubo, facendo il cubo dello spigolo, vale a dire moltiplicando lo spigolo due volte per sè stesso* (n.° 58).

Esempio: *Qual è il volume d'un cubo, il cui spigolo ha* 2*m.*, 5 *di lunghezza?*

Avremo: $2{,}5 \times 2{,}5 \times 2{,}5 = 15{,}625$; cioè 15 *metri cubi,* 625 *decimetri cubi.*

(1) Vedi la *Geometria* dello stesso autore.

2.° *Si calcola il volume d'un corpo di forma rettangolare, moltiplicando fra loro le tre dimensioni di questo corpo.*

Esempio: *Calcolare il volume d'un muro, avente* 1m., 15 *di lunghezza,* 0m., 6 *di larghezza, e* 0m., 27 *di grossezza.*

Avremo: 1,15 × 0,6 × 0,27 = 0,1863; cioè 186 *decimetri cubi,* 300 *centim. cubi.* (Vedi i Probl. 166, 167 ec.)

ESERCIZI.

CII. Leggere i numeri seguenti:

27*m. cub.*, 589342. — 3*m. cub.*, 8732147. — 0*m. cub.*, 88. — 0*m. cub.*, 9937. — 0*m. cub.*, 07342. — 0*m. cub.*, 0043.

CIII. Scrivere i numeri seguenti:

Otto metri cubi, centoventidue decimetri cubi. — Un metro cubo, quindici decimetri cubi. — Centoquaranta metri cubi, nove decimetri cubi. — Ventotto decimetri cubi, tre centimetri cubi. — Quarantasette decimetri cubi, sedici millimetri cubi. — Tre decimetri cubi, cinquantotto millimetri cubi.

CIV. Ridurre metri cubi 68,4328562, 1.° in decimetri cubi. — 2.° in centimetri cubi. — 3.° in millimetri cubi.

Dello Stero.

288. Il metro cubo prende il nome di Stero quando serve a misurare *le legna da ardere.*

Lo stero non ha che un solo multiplo, che è il *decastero,* o 10 steri; e un sottomultiplo, che è il *decistero,* o decimo di stero.

289. La legge non riconosce che le seguenti misure effettive per le legna da ardere:

1.ª *Il mezzo decastero,* o 5 Steri.
2.ª *Il doppio stero,* . o 2 Steri.
3.ª *Lo Stero,* . . . o 1 Stero.

MISURE DI CAPACITÀ.

Del Litro.

290. Si dicono *misure di capacità* quelle che servono a misurare i *liquidi*, come l'acqua, il vino, l'olio, i liquori, e le *materie secche*, come il grano, i legumi, il carbone ec.

L'unità principale delle misure di capacità è il Litro. — Il litro è la capacità d'un *decimetro cubo* (1).

291. Multipli del litro. — I multipli del litro sono il *decalitro*, che vale 10 litri, e l'*ettolitro*, che vale 100 litri.

292. Sottomultipli. — I sottomultipli del litro sono il *decilitro*, o decimo di litro, e il *centilitro*, o centesimo del litro.

Non esiste misura più grande dell'ettolitro, nè misura più piccola del centilitro.

293. Il *litro*, di cui si fa uso per misurare le capacità, ha la forma d'un *Cilindro* (2), la cui capacità è quella d'un decimetro cubo.

294. Le misure effettive di capacità autorizzate dalla legge sono 13, cioè:

1.ª	*L'ettolitro*, che vale . . .	100 litri.
2.ª	*Il mezzo ettolitro*, ...	50 litri.
3.ª	*Il doppio decalitro*, ...	20 litri.
4.ª	*Il decalitro*, ...	10 litri.
5.ª	*Il mezzo decalitro*, ...	5 litri.
6.ª	*Il doppio litro*, ...	2 litri.
7.ª	Il litro, ...	1 litro.
8.ª	*Il mezzo litro*, ...	5 decilitri.
9.ª	*Il doppio decilitro*, ...	2 decilitri.
10.ª	*Il decilitro*	1 decilitro.
11.ª	*Il mezzo decilitro*, ...	5 centilitri.
12.ª	*Il doppio centilitro*, . . .	2 centilitri.
13.ª	*Il centilitro*, ...	1 centilitro.

Anche le misure di capacità non ammettono dunque che i soli divisori 1, 2 e 5 (n.º 266).

(1) Vedi la *Geometria* sopra citata.

(2) Idem.

295. La forma e la dimensione delle misure di capacità è diversa secondo l'uso a cui sono destinate è la materia di cui sono formate.

MISURE DI PESO.

Del Grammo.

296. *L'unità principale delle misure di peso è il* Grammo. — Il grammo è il peso d'un centimetro cubo d'acqua pura al *maximum* di densità: vale a dire alla temperatura di 4 gradi del termometro centigrado.

297. Multipli del grammo. — I multipli del grammo sono il *decagrammo,* uguale a 10 grammi; l'*ettogrammo,* uguale a 100 grammi; il *chilogrammo,* uguale a 1000 grammi; il *miriagrammo,* uguale a 10000 grammi; il *quintale metrico,* ugnale a 100000 grammi; la *tonnellata di mare,* uguale a 1000000 di grammi.

298. Sottomultipli. — I sottomultipli del grammo sono il *decigrammo,* o decimo di grammo; il *centigrammo,* o centesimo di grammo, e il *milligrammo,* o millesimo di grammo.

299. I pesi usuali formano tre serie: *grossi pesi, pesi medj, e piccoli pesi.*

I grossi pesi vanno dal chilogrammo a 50 chilogrammi.

I pesi medj dal grammo al chilogrammo.

I piccoli pesi, dal milligrammo al grammo.

300. Ecco la serie dei pesi autorizzati dalla legge:

Grossi pesi.	*50 chilogrammi*	50000 grammi.
	20 chilogrammi, ...	20000 grammi.
	10 chilogrammi, ...	10000 grammi.
	5 chilogrammi, ...	5000 grammi.
	2 chilogrammi, ...	2000 grammi.
Pesi medj.	Chilogrammo, ...	1000 grammi.
	Mezzo chilogrammo, . .	500 grammi.
	Doppio ettogrammo, . .	200 grammi.
	Ettogrammo	100 grammi.
	Mezzo ettogrammo, . . .	50 grammi.
	Doppio decagrammo, . .	20 grammi.
	Decagrammo	10 grammi.
	Mezzo decagrammo . . .	5 grammi.
	Doppio grammo, . . .	2 grammi.

Piccoli pesi.		
	Grammo, ...	1 grammo.
	Mezzo grammo, ...	5 decigrammi.
	Doppio decigrammo, . . .	2 decigrammi.
	Decigrammo, ...	1 decigrammo.
	Mezzo decigrammo, ...	5 centigrammi.
	Doppio centigrammo, . . .	2 centigrammi.
	Centigrammo, ...	1 centigrammo.
	Mezzo centigrammo, . . .	5 milligrammi.
	Doppio milligrammo, . . .	2 milligrammi.
	Milligrammo	1 milligrammo.

301. I grossi pesi sono di ferro, ed hanno la forma d'una *Piramide troncata,* a sei facce uguali, vale a dire avente per base un *Esagono regolare.* — I pesi medj sono di ottone, ed hanno la forma d'un cilindro, la cui altezza è uguale al diametro; tranne il grammo e il doppio grammo, che hanno un diametro molto più grande dell'altezza. — I piccoli pesi sono di ottone, ed hanno la forma di piastre quadrate.

Delle Monete.

302. *L'unità principale delle monete è la* Lira italiana. — La lira italiana è una moneta d'argento che pesa 5 grammi, e racchiude nove decimi d'argento puro e un decimo di rame.

303. La lira non ha multipli, come le altre misure; così non si dirà *una decalira, un'ettolira,* ma 10 lire, 100 lire.

304. Sottomultipli. — La lira italiana si divide in 10 *decimi,* il decimo in 10 *centesimi,* e il centesimo il 10 *millesimi.*

305. Ecco le diverse monete autorizzate dalla legge.

Monete d'oro.

	Diametro.	Peso.
1. La moneta di 100 lire . .	35*millim.*	32,*gr.* 2588.
2. La moneta di 50 lire . .	28 . .	16, 1294.
3. La moneta di 20 lire . .	21 . .	6, 4516.
4. La moneta di 10 lire . .	19 . .	3, 2258.
5. La moneta di 5 lire . .	17 . .	1, 6129.

Monete d'argento.

1. La moneta di 5 lire . .	37*millim.*	25.*gram.*
2. La moneta di 2 lire . .	27 . .	10.
3. La moneta di 1 lira . .	23 . .	5.
4. La moneta di 50 centesimi	18 . .	2,5.
5. La moneta di 20 centesimi	15 . .	1.

Monete di rame.

1. La moneta di 10 centesi.	30*millim.*	10.*gram.*
2. La moneta di 5 centesimi.	25 . .	5.
3. La moneta di 2 centesimi.	20 . .	2.
4. La moneta di 1 centesimo.	15 . .	1.

ESERCIZI E PROBLEMI.

Di recapitolazione sulle misure metriche.

CV. Convertire Litri 8764,358 — in decilitri — in centilitri — in millilitri — in decalitri — in ettolitri.

Convertire Decalitri 142,27 — in litri — in ettolitri — in decilitri.

Convertire Grammi 89321709,732 — in decigrammi — in centigrammi — in milligrammi — in decagrammi in ettogrammi — in chilogrammi — in milligrammi.

Convertire Chilogrammi 87666,27 — in grammi — in decagrammi — in ettogrammi — in miriagrammi.

CVI. Se un metro di panno costa lire 4, 25 c., quanto costa un decametro? — un decimetro?

Se un chilogrammo di mercanzìa costa Lire 40, 15, c., quanto costerà un ettogrammo? — un decagrammo?

Se un decastero di legna costa Lire 3, 10 c., quanto costa uno stero? — un decistero?

Se un'ettara di terreno costa Lire 120, 30 c., quanto costerà un'ara?

PROBLEMI.

159. Un quadrato ha *5m.*, *37centim.* di lato: qual' è la sua superficie?

R. — Superficie: *28m. q.*, *83dec. q.*, 69 *cent. q.*

160. Esprimere in decimetri quadrati, centimetri quadrati ec. la superficie d' un quadrato, che ha *0m.*, *548mill.* di lato.

R. — Superficie: *0m. q.*, *30dec. q.*, *3cent q.*, *4. mill. q.*

161. Un cristallo rettangolare ha *1m.*, 15 di lunghezza: e *0m.*, 5 d' altezza; qual è la sua snperficie?

R. — Superficie: *0m. q.*, *57dec. q.*, *57cent. quad.*

162. Una sala ha *15m.* di lunghezza e 13 di larghezza: qual' è la sua superficie?

R. — Superficie: *195.m.q.*

163. Si domanda in ettare, are e centiare la superficie d' un giardino quadrato, che ha *128m.*,56 di lato.

R. — Superficie: *1ett.*, *65are*, *27centiare.*

164. Esprimere in ettare, are è centiare la superficie d' nn campo rettangolare, avente *318m.*,5 di lunghezza, e *129m.*,74 di larghezza.

R. — Superficie: *4ett.*, *13are*, *22. cent.*

165. Si domanda la superfieie d' un campo quadrato, che ha *136m.*,8 di lato.

R. — Superficie: *1ett.*, *87are*, *14.cent.*

166. Qual è il volume d' un cubo, il cui spigolo ha *2m.*,5 di lunghezza?

R. — Volume: *15.m cub.*, *625.decim. cub.*

167. — Si vuol conoscere il volume d' un cubo, che ha *0m.*,12 di spigolo.

R. — Volume: *1decim. cubo*, *728centim cubi.*

168. Calcolare il volume d' un masso di marmo, avente *1m.*, 15 di lunghezza, *0m.* 6 di larghezza, c *0m.* 27 di grossezza.

R. — Volume: 186 *decim cubi*, *300.cent. cubi.*

169. Qual è il volume o la solidità d' uu cubo che ha *3m.* 27 di spigolo?

R. — Volume: *34m. cubi*, *965decim. cubi*, 783 *centim. cubi.*

170. Quanti metri cubi d' aria sono in una stanza che ha *8m*, 5 di lunghezza, *6m.*, 35 di larghezza, e *4m.* 70 d' altezza?

R. — Vi sono *253m. cubi*, 682 *decim. cubi*, 500 *centim. cubi.*

171. Esprimere in decimetri, centimetri, millimetri cubi il volume d' una scatola rettangolere, che ha 31 centim. di lunghezza, 18cent. di larghezza, e *127mill.* d' altezza.

R. — Volume: *7decim. cubi*, *86centim. cubi*, *600.mill. cubi.*

172. Un cavallo percorre *1chilom*: in 5 minuti; si vuol sapere il cammino che farà in 42 minuti.

R. — Farà *8chilom.*, *4. ettom.*

173. Una botte di vino di 374 litri costa Lire 82,75 c. — A quanto per litro bisognerà rivenderlo, per farci un guadagno di lire 25 ?

R. — Lire 0,29 c. il litro.

174. Una muraglia ha 25*m.* di lunghezza, 3*m.*, 45 di altezza, e 0*m.*,74 di grossezza. — Esprimere la sua solidità, o il suo volume, in metri cubi e frazioni di metro cubo.

R. — Volume : 63*m. cubi*, 825 *decimet. cubi.*

175. Un campo rettangolare ha 105*m.*, 8 di lunghezza sopra 64*m.*, 15 di larghezza. — Esprimere la sua superficie in are e centiare.

R. — Superficie : 67*are*, 87 centiare.

176. Un fattore ha raccolto 873*chil.*, 7*ettogr.* d' uva, che ha venduto a ragione di lire 4,50 c. ogni 100.*chil.* — Qual somma ha egli ritirato ?

R. — Lire 39,32 c.

177. Un mercante ha fatto venire tre barili d' olio, di cui il 1.° pesa 185*chil.*, 7*decagr.*; il 2.° 209*chil.*, 3*ettogrammi.* e il 3.° 163*chil*, 28*decagramm.* — Qual è il peso totale ?

R. — Peso : 557*chil.*, 6*ettogrammi*, 5*decagrammi.*

178. Un tale ha pagato 112 lire per 23 giornate di muratore, e lire 47,60 c. per 34 giornate di manovale. — Dicasi ciò che hanno guadagnato giornalmente il muratore e il manovale.

R. — Il muratore lire 4, 87 c. — Il manovale lire 1, 40 c.

179. Un contadino ha nutrito per 6 mesi un piccolo maiale, che gli costò lire 9. — L' animale in questo tempo ha consumato 365*chilogr.* di semola, al prezzo di 9 centesimi il chilogrammo. — Ammazzato e pulito, ha pesato 48*chil.* — Si vuol sapere quanto costerà il chilogrammo la sua carne.

R — Lire 0, 87 c

180. Un cavallo ha consumato in un anno 1935*chilogr.* di fieno, 879*chilogr.* di paglia e 2*ettol.* di vena. Supponendo che il fieno sia costato lire 8, 75 c., la paglia lire 4, 50 c. ogni 100*chilogr.*, e il decalitro di vena lire 1, 08 c., si domanda quanto si sia speso.

R. — Lire 230, 46 c.

181. Un ufficiale che comanda a due compagnie, promette ad ogni soldato che monterà all'assalto lire 3 per quelli della prima compagnia e lire 2 per quelli della seconda; egli distribuisce così lire 192 alla prima compagnia e lire 208 alla seconda. — Si dica quanti soldati hanno montato all' assalto, e quanti erano di ciascuna compagnia.

R. — In tutti 168. — Della prima compagnia 64; della seconda 104.

182. Una fattoria si compone d'un giardino di 31*are*, d'un prato di 7*ettare*, 3*are* e 5*centiare*: d'un bosco di 15*ettare*, 18*are*: d' un campo di 51*are*, 22*cent*; la pianta della abitazione è di 2*are*, 15. — Si vuol conoscere la superficie totale della fattoria.

R. — Superficie: 23*ettare*, 5*are*, 42*cent.*

183. Un battello a vapore prende carbone in tre tempi differenti, cioè: prima 83*decalit.*, al prezzo di lire 2, 50 c. l'ettolitro: indi 11*ettol.* allo stesso prezzo, e finalmente 2955*chilogr.* a ragione di lire 2, 05 c. ogni 100*chil.* — Si domanda la spesa totale.

R. — Lire 108, 83 c.

184. Il pavimento d'un salone è costato lire 9, 50 c. ogni metro quadrato. — Qual somma è stata spesa, sapendo che il salone aveva 7*m*, 2 di lunghezza, e 5*m*, 3 di larghezza?

R. — Lire 362, 52 c.

185. Un oste fa venire una botte di vino di 317 litri, che gli costa lire 73, 50 c. sul posto; egli paga inoltre pel trasporto lire 9, 60 c. — A quanto deve vendere il litro per guadagnare lire 34 sul tutto?

R. — Deve rivenderlo 37 centesimi.

186. Una piazza ha 154*m. q.* di superficie, e la sua larghezza è di 5*m.*, 25 — Trovare la sua lunghezza.

R. — Lunghezza: 29*m.*, 33.

187. Un venditore di liquori fa d'un litro d'acquavite 32 bicchierini, che vende 15 centesimi. — Quanto guadagna per ogni litro, supponendo che gli costi lire 2, 55 c.?

R. — Guadagna lire 2, 25 c.

188. I cavalli d'una diligenza fanno 8*chilom.* ogni ora. — Si vuol sapere il tempo che consumerà la diligenza a percorrere una strada di 183*chilom.*

R. — Consumerà 22 ore, 52 minuti, 30 secondi.

189. Se un metro di filo di ferro pesa 2*ettogr.*, qual'è la lunghezza d'una matassa dello stesso filo, pesante 13*chilogr.*, 20*decagr.*?

R. — Lunghezza: 66*m.*

190. In uno stabilimento sono stati bruciati in un'invernata 16872*chil.*, 9 di legna, che furono pagate a ragione di lire 2, 15 c. ogni 100*chil.* — Qual'è stata la spesa?

R. — Spesa: lire 362, 77 c.

191. Una fossa di 135*m.* di lunghezza, 2*m.*, 4 di larghezza, e 1*m.*, 86 di profondità, dev'essere riempita da un numero di lavoranti; ogni metro cubo così ripieno si paga lire 0, 35 c. — Quale ne sarà la spesa?

R. — Spesa: lire 210, 92 c.

192. Il pianterreno d'una casa è composto, 1.° d'un vestibolo rettangolare, di 6*m.*, 2 di lunghezza, sopra 3*m.*, 9 di larghezza; 2.° d'un salone quadrato, di 4*m.*, 7 di lato; 3° d'una cucina rettangolare di 5*m.*, 3 sopra 3*m.*, 1. — Far conoscere la superficie totale di questo pianterreno in metri quadrati e frazione di metro quadrato.

R. — Superficie: 62*m q.*, 70 *decim. q.*

193. Trovare la lunghezza d'una strada, la cui larghezza è di 7*m.*, 54, e la superficie di 50463*metri q.*

R. — Lunghezza: 6692*m*, 7055.

194. Due Municipi devono restaurare insieme una strada di 2548*m.* di lunghezza, e 6*m.*, 85 di larghezza; il restauro consiste nel rialzare la strada di 0*m.*, 70 in tutta l'estensione. — Si dica quale sarà il numero dei metri cubi che necessita questo lavoro.

R. — Metri cubi 12217, e 660*dec. cubi.*

195. L'esperienza dimostra che a misura che uno s'introduce nell'interno della terra, trova un grado di calore ogni 30*m.* di profondità ; a quale profondità si troverà un uomo, quando il termometro segna 34 gradi di calore?

R. — Si troverà a 1020*m.* di profondità.

196. Secondo il problema precedente, quale sarebbe la profondità d'una mina o d'un pozzo, ove il termometro indicasse 57 gradi?

R — La profondità sarebbe di 1710*m.*

197. Il suono percorre 337*m.* per secondo: a qual distanza sarà giunto in 13 secondi?

R. — A 4381*m.*

198. Secondo il numero precedente, al momento in cui un cacciatore fa fuoco, un uomo lo scorge, e corrono 3 secondi tra questo istante e quello in cui egli ode l'esplosione; si dica a qual distanza sono l'uno dall'altro l'osservatore ed il cacciatore.

R. — Sono distanti 1011*m.*

199. Secondo il problema 197, far conoscere a qual distanza scoppia la folgore, quando corrono 11 secondi fra l'apparire del lampo e il rumore del tuono.

R. — Distanza: 3707*m.*

200. Una miniera di carbone dà in 15 giorni 1294 balle di carbone, ciascuna delle quali contiene 1*ettol*, 25. — La spesa giornaliera è di lire 475,75 c. — Quanto costerà un ettolitro di carbone?

R. — Costerà 49 centesimi

201. Un grammo di semi da bachi può produrre in media 1*chilogr*, 920 di bozzoli. Chi abbia ottenuto 7367*chilogr.*, 04 di bozzoli, quanti grammi di seme avrà fatto schiudere?

R. — Grammi 3837.

NUMERI COMPLESSI.

306. Si chiamano *Numeri complessi* quelli che sono formati di unità principali e di suddivisioni; come: *Ore, minuti, secondi; Libbre, once, denari, grani* ec.

I pesi e le misure antiche si esprimevano e si calcolavano in numeri complessi. Noi ci limiteremo alla riduzione e al calcolo delle vecchie misure toscane, e daremo così la norma per ridurre e calcolare qualunque altra misura.

307. Ecco la tavola delle antiche misure toscane:

1.ª Unità monetaria. — *Lira fiorentina,* che dividevasi in 20 *soldi* e il soldo in 12 *denari* .

La lira fiorentina equivale a lire ital. 0, 84.

2.ª Unità di peso. — *Libbra,* che si divideva in 12 *Once,* l'oncia in 24 *Denari,* il denaro in 24 *Grani.*

La libbra toscana vale grammi 339, milligr. 542.

3.ª Unità di lunghezza. — *Braccio,* che dividevasi in 20 *soldi,* e il soldo in 12 *Denari.*

Un braccio toscano equivale a metri 0, 583626.

4.ª Unità di superficie. — *Braccio quadro,* che si divideva in 400 *Soldi quadri,* di 144 *Denari quadri* ciascuno. — Per le misure *agrarie* l'unità era il *Quadrato,* che dividavasi in 10 *Tavole,* la tavola in 10 *Pertiche,* la pertica in 10 *Deche,* e la deca in 10 *Braccia quadre*; così il quadrato conteneva 10000 braccia quadre.

Un braccio quadro equivale a *m. q.* 0, 340619, e un quadrato a *are* 34, 0619.

5.ª Unità di volume. — *Braccio cubo,* che si componeva di 8000 *Soldi cubi,* ognuno dei quali si suddivideva in 1728 *Denari cubi.* — Per le legna da ardere l'unità di misura era la *Catasta,* che in commercio valutavasi braccia cube 18. — Pel legname da costruzione eravi il *Traino,* che conteneva 2 braccia cube, e che dividevasi in 12 *Bracciuola,* ognuno dei quali in 12 *Once.*

Un braccio cubo vale *m. cub.* 0, 198794.

6.ª Unità pei liquidi. — *Barile,* che, se da vino, dividevasi in 20 *Fiaschi,* e conteneva libbre $133 + \frac{1}{3}$ d'umido ; se da olio, dividevasi in 16 fiaschi, e conteneva libbre 88. — Il

fiasco si componeva di 2 *Boccali*: il boccale di 2 *Mezzette*: la mezzetta di 2 *Quartucci*. — Due barili formavano una *Soma*.

Un barile da vino equivale a *lit.* 45, 584041.

Un barile da olio . . . . *lit.* 33, 428908.

7.ª Unità per gli aridi. — *Staio*, che dividevasi in 2 *Mine*: la mina in 2 *Quarti*: il quarto in 8 *Mezzette*: la mezzetta in 2 *Quartucci*. — Tre staia formavano un *Sacco*: 8 sacca un *Moggio*.

Uno staio vale *lit.* 24, 362862.

308. L' unità di *tempo* è il *Giorno solare*, che si divide in 24 *Ore*, l'ora in 60 *Minuti*, il minuto in 60 *Secondi*. — L'*Anno comune* si compone di 365 giorni; il *bisestile* di 366, i quali si dividono in 12 *Mesi*, alcuni di 31, altri di 30, ed uno di 28 o 29 giorni. — L'*Anno astronomico*, si compone di 365 giorni, ore 5, minuti 48, secondi 50 $\frac{1}{5}$. — L'*Anno mercantile*, si divide in 360 giorni, di cui ogni mese ne conta 30.

309. In 360 *Gradi* si divide la *Circonferenza del Circolo*, il grado in 60 minuti, il minuto in 60 secondi.

Riduzione dei numeri complessi alla forma di frazione, e viceversa.

310. Regola. — *Per ridurre un numero complesso in una sola frazione ordinaria dell' unità principale, bisogna convertire il numero dato in unità dell' ultimo ordine, che trovasi nel numero stesso; il resultato sarà il numeratore della frazione richiesta, alla quale si darà per denominatore il numero delle unità di quell' ultimo ordine, necessario a formare un' unità principale.*

Se la frazione ordinaria così ottenuta si vuol ridurre in decimale, si opererà secondo la regola esposta al n.° 232.

ESEMPI.

1.° *Ridurre in frazione ordinaria e decimale di Giorno, Ore* 5, *minuti* 15.

Poichè 1 ora vale 60 minuti, ore 5 saranno $5 \times 60 = 300$ minuti; aggiungendo a questi i 15 minuti, avremo $300 + 15 = 315$ minuti.

Ora, un giorno essendo composto di 24 ore, si moltiplicherà 24 per 60, e avremo 1440 minuti, che sarà il denominatore del numero 315.

Dunque, Ore 5, minuti 15, equivalgono a $\frac{315}{1440}$, ossia $\frac{7}{32}$ di giorno ; la qual frazione ridotta in decimale, da 0,218....

2.° *Ridurre in frazione ordinaria e decimale Lire toscane* 8, *soldi* 10, *denari* 4.

Poichè la lira vale 20 soldi, 8 lire saranno $8 \times 20 = 160$ soldi; a questi aggiungendo i 10 soldi, si ha $160 + 10 = 170$ soldi.

Ora, un soldo essendo composto di 12 denari, moltiplicando 170 per 12, si ha 2040 denari, ai quali unendo i 4 dell'enunciato, avremo in tntto 2044 denari, che sarà il numeratore della frazione cercata.

Per avere il denominatore osserveremo che, la lira tosc. dividendosi in 20 soldi e il soldo in 12 denari, una lira sarà uguale a 20×12 o 240 denari. Dunque, dando questo numero per denominatore ai 2044 denari già trovati, si conchiuderà che Lire tosc. 8, soldi 10, denari 4, equivalgono a $\frac{2044}{240}$ di lira, ossia, estraendo gl'interi, a Lire $8 + \frac{124}{240} =$ Lire $8 + \frac{31}{60}$, e in decimali, Lire 8,5166. . . . .

311. Reciprocamente, *per ridurre una frazione ordinaria o decimale in numero complesso equivalente, si divide, se è possibile, il numeratore pel denominatore ; il quoziente esprimerà unità principali. Si moltiplica il resto pel numero delle parti in cui l'unità principale si suddivide, e il prodotto si divide per lo stesso denominatore ; il quoziente esprimerà unità di second' ordine. Se vi è un secondo resto, si opera come pel primo, e così di seguito, finchè si sieno ottenute le unità dell' ultimo ordine.*

ESEMPI.

1.° *Ridurre* $\frac{511}{60}$ *di Lira toscana in numero complesso equivalente.*

Dividendo 511 per 60, si ha di quoziente 8, che rappresenta *Lire*, e di resto $\frac{31}{60}$ di lira, che bisogna convertire in Soldi,

cioè in *ventesimi* di lira. A tale oggetto moltiplicheremo il numeratore 31 per 20, e il prodotto si dividerà pel denominatore (vedi n.° 231).

Avremo: $\frac{31 \times 20}{60} = \frac{62}{6} = 10$ *soldi* $+ \frac{2}{6}$ di soldo, che bisogna ridurre in denari, cioè in *dodicesimi* di soldo. — Perciò moltiplicheremo il numeratore 2, per 12, e il prodotto lo divideremo pel denominatore 6; e si avrà: $\frac{2 \times 12}{6} = \frac{24}{6} = 4$ *denari.*

Dunque $\frac{511}{60}$ di Lira toscana, equivalgono a *Lire tosc.* 8, *soldi* 10 e *denari* 4.

In pratica il calcolo si dispone così:

Numeratore	511	60 Denominatore
1.° Resto . . .	31 × 20	L. 8. S. 10. D. 4.
	620	
2.° Resto . . .	20 × 12	
	240	
	00	

2.° *Ridurre* 0,2638 *di Libbra in numero complesso equivalente.*

Il denominatore sottinteso è 10000. — Si dovrebbe dunque dividere 2638 per 10000; ma la divisione essendo impossibile, si moltiplicherà 2638 per 12, e il prodotto si dividerà per 10000; il quoziente esprimerà *Once.*

Avremo così:

$$\frac{2638 \times 12}{10000} = \frac{31656}{10000} = 3 \text{ Once} + \frac{1656}{10000},$$

che bisogna ridurre in Denari, ossia in *ventiquattresimi* d'oncia; cioè si avrà:

$$\frac{1656 \times 24}{10000} = \frac{39744}{10000} = 3\ \textit{Denari} + \frac{9744}{10000},$$

che convertiremo in Grani, o in *ventiquattresimi* di denaro; e si avrà:

$$\frac{9744 \times 24}{10000} = \frac{233856}{10000} = 23\ \textit{Grani} + \frac{3856}{10000} \text{ di Grano}$$

Dunque la frazione 0,2638 di Libbra, equivale a *Once* 3, *Denari* 3, *Grani* 23 + $\frac{3856}{10000}$.

3.° *Ridurre* $\frac{315}{1440}$ *di Giorno in numero complesso equivalente.*

Ecco il tipo del calcolo:

$$\begin{array}{l|l} 315 \times 24 & 1440 \\ \hline 7560 & \text{G. 0, Ore 5, Min. 15.} \\ \quad 360 \times 60 & \\ \hline 21600 & \\ \quad 7200 & \\ \quad 0000 & \end{array}$$

Dunque $\frac{315}{1440}$ di Giorno equivalgono a *Ore* 5 e *Minuti* 15.

ESERCIZI.

CVII. Ridurre in frazione ordinaria e decimale lire toscane 704, 13.*s.* 8.*d.*

Ridurre Ore 7, minuti 12 e secondi 15 in frazione ordinaria e decimale di Giorno.

Ridurre Libbre 4, Once 7, Denari 8 e Grani 15 in frazione decimale di Libbra.

Ridurre $\frac{11}{15}$ di Libbra in numero complesso equivalente.

Ridurre 0,3850 di Lira toscana in numero complesso equivalente.

Esprimere in Ore, minuti e secondi la frazione $\frac{25}{28}$ di Giorno.

PROBLEMI (1).

202. Si trovi il costo di Libbre 370, Once 9, mercanzia, a lire italiane 4 96 c. la libbra.

R. — Costo: Lire italiane 1835, 21 c.

203. Un pane di zucchero pesa Libbre 7, Once 10, Denari 8, e si paga a ragione di Lire italiane 1, 15 c. la libbra; si domanda quanto costa.

R. — Costa: Lire Italiane 9, 04 c.

204. Quale è il prezzo di Sacca 32 e Staia 2 di grano, a Lire it. 22, 45 c. il sacco?

R. — Prezzo: Lire italiane 733, 35 c.

205. Sono state spese Lire italiane 470, 18 c. in Barili 34, Fiaschi 6 d'olio; quanto si è pagato il barile?

R. — Si è pagato Lire italiane 13, 68 c.

206. Domandasi il costo di Braccia 72, Soldi 15 di panno, a Lire italiane 4, 78 c il braccio.

R. — Costo: Lire italiane 347, 745.

LE QUATTRO OPERAZIONI SOPRA I NUMERI COMPLESSI.

Addizione.

312. Regola. — *Per sommare più numeri complessi, si scrivono gli uni sotto gli altri in modo, che le unità della stessa specie sieno in una stessa colonna verticale; indi si comincia l' operazione dalla destra, facendo successivamente la somma delle unità della stessa specie; e quando questa somma contiene delle unità dell' ordine immediatamente superiore, si ritengono per aggiungerle a quest' ordine, dopo avere scritto il resto sotto la colonna sommata.*

ESEMPIO

Si vogliono sommare *Lire toscane* 3, *Soldi* 4, *Den.* 8 + L. 4, S. 16, D. 8 + L. 6, S. 18, D. 10.

(1) Per risolvere questi problemi si dovranno primieramente ridurre i numeri complessi in frazione decimale, secondo la regola esposta al n. 310.

OPERAZIONE

Lire toscane	« 3	Soldi	4	Den.	8
	» 4	»	16	»	8
	» 6	»	18	»	10
Totale: Lire toscane	15,	Soldi	0,	Den.	2

SPIEGAZIONE

La somma dei denari è 26, cioè 2 *soldi* e 2 *denari*; si scrivono 2 denari, e 2 soldi si ritengono per aggiungerli alla colonna dei soldi.

La somma dei soldi è 38, più 2 di porto, 40; 40 soldi essendo 2 *lire*, scriveremo *zero*, e le 2 lire si riterranno per aggiungerle alla colonna di esse. La somma delle lire è 13, a cui unendo le 2 di porto, scriveremo 15; e la Somma richiesta, sarà: *Lire toscane* 15, *Soldi* 0, *Denari* 2.

Per l'addizione di qualunque misura complessa, basta conoscerne le suddivisioni, e operare secondo la regola e l'esempio precedente.

Sottrazione.

313. REGOLA. — *Per sottrarre due numeri complessi l'uno dall'altro, si scrive il più piccolo sotto il più grande, disponendo in colonna le unità della stessa specie, e si comincia l'operazione dalla destra, togliendo ogni numero inferiore dal numero superiore corrispondente. Se qualche sottrazione parziale non può effettuarsi, si aggiunge al numero superiore una unità della specie che le sta a sinistra, avvertendo, nel passare a questa, di aggiungere un' unità al numero inferiore* (n.° 42).

ESEMPIO.

Da 6 *Ore*, 46 *minuti*, 15 *secondi*, levare 4 *Ore*, 54 *minuti*, 8 *secondi*.

OPERAZIONE

Da	6	ore	46	minuti	15	secondi
levare	4	«	54	«	8	«
Resto:	1	ora,	52	minuti,	7	secondi.

Spiegazione

Da 15 secondi levandone 8, restano 7 *secondi*; da 46 minuti non si posson togliere 54 minuti; bisognerà dunque aggiungere un' ora, o 60 minuti a 46, ciò che dà 106 minuti; ora, da 106 levando 54, restano 52 *minuti*. Finalmente, aggiungendo 1 al 4, diremo: da 6 ore togliendo 5 ore, resta 1 *ora*. — Il resto cercato è dunque 1 *ora*, 52 *minuti* e 7 *secondi*.

Moltiplicazione.

314. È necessario qui rammentare ciò che fu detto al n.° 55, cioè che nella moltiplicazione dei numeri concreti il prodotto è sempre della stessa natura del moltiplicando. Quindi se il moltiplicando e il moltiplicatore sono *eterogenei*, bisogna prendere per moltiplicando quello dei due fattori della cui specie dev' essere il prodotto.

315. La moltiplicazione dei numeri complessi può effettuarsi in più modi.

1.° *Riducendo in frazione ordinaria o decimale il moltiplicando e il moltiplicatore, eseguendo la moltiplicazione secondo il metodo ordinario, e convertendo il prodotto ottenuto in unità del moltiplicando e parti d'unità.*

Esempio 1.° — *Calcolare il prezzo di Braccia* 6, *soldi* 9 *e denari* 4 *di panno, a ragione di Lire toscane* 16, *soldi* 18 *e denari* 8 *il braccio.*

Soluzione

La frazione di braccio 9 *soldi* e 4 *denari*, ridotta in frazione ordinaria (vedi n.° 310), equivale a $\frac{7}{15}$ di braccio; e la frazione di lira 18 *soldi* e 8 *denari*, ridotta parimente in frazione ordinaria, è uguale a $\frac{14}{15}$. Ora, moltiplicando braccia $6 + \frac{7}{15}$ per lire $16 + \frac{14}{15}$, si ha di prodotto *Lire* $109 + \frac{113}{225}$; la qual frazione, ridotta in parti di lira (n.° 311), darà *soldi* $10 + \frac{8}{15}$ di denaro.

Il prezzo cercato è dunque *Lire toscane* 109, *soldi* 10 + $\frac{8}{15}$ di denaro.

Lo stesso resultato si sarebbe ottenuto, riducendo i due fattori in frazioni decimali.

2.° Metodo. — *Per porzioni o parti aliquote.*

Diconsi *parti aliquote* d' un numero tutti i divisori di esso; *parte aliquota* è sinonimo di *divisore*, di *fattore* e di *sottomultiplo*. (n.° 103).

Esempio 2.° — *Valutare libbre* 432 *di mercanzia, a lire toscane* 4, *soldi* 13, *e denari* 4 *la libbra.*

In questo esempio il moltiplicando è una somma, cioè *Lire* 4, *soldi* 13 e *denari* 4, e il moltiplicatore è 432, che si considera come un numero astratto. — Bisognerà dunque, per avere il valore richiesto, moltiplicare ciascuna delle parti del moltiplicando pel moltiplicatore e sommare i resultati (n.° 48 — 1.°).

Per eseguire queste moltiplicazioni parziali si considera ogni parte come decomposta in parti più piccole, ma tali che ciascuna sia contenuta un numero esatto di volte nella precedente, cioè che sia una *parte aliquota* della medesima, come più sotto viene spiegato.

Operazione

	Libbre	432
	Lire	4, S. 13 D. 4
Per 4 lire		1728
Per 10 soldi . . .		216
Per 3 soldi e 4 denari		72
	Costo: Lire	2016

Spiegazione

Si moltiplicheranno primieramente le libbre 432 per lire 4, e si avranno *Lire* 1728. — Indi osserveremo che soldi 13 e denari 4, si possono decomporre in soldi 10, più soldi 3 e denari 4; ora, soldi 10 sono la *metà* d'una lira; dunque se si prende la metà di 432, avremo lire 216, che sarà il prezzo di libbre 432 a soldi 10 la libbra. Restano soldi 3 e denari 4, che sono il *sesto* della lira; perciò prendendo il *sesto* di 432, avremo *lire* 72

che è il costo di libbre 432 a soldi 3 e denari 4. — Sommando questi tre prodotti parziali, si ottengono *lire toscane* 2016 pel prezzo richiesto.

Invece di decomporre i soldi e i denari in 10, più 3 e 4, si potevano anche decomporre in soldi 6 e denari 8, più soldi 6 e denari 8; e in questo caso si sarebbe preso *due volte il terzo* di 432, perchè 6 soldi e 8 denari sono *un terzo* di lira toscana. Il resultato sarebbe stato lo stesso.

316 Si può dunque stabilire, in generale, che *se uno dei fattori è complesso e l' altro incomplesso, si moltiplicano fra loro i due numeri interi, e quindi si prendono sul numero incomplesso le parti aliquote dell' altro fattore.*

Esempio 3.° — *Valutare braccia* 35 *e soldi* 10 *di panno, a lire toscane* 8, *soldi* 16, *denari* 8 *il braccio.*

Operazione

	Braccia 35, S. 10
	Lire 8, S. 16, D. 8
Per lire 8	280 . — . — .
Per soldi 10	17 . 10 . — .
Per soldi 6 e denari 8 . .	11 . 13 . 4 .
Per soldi 10 di braccio . .	4 . 8 . 4 .
Costo: Lire	313 . 11 . 8 .

Spiegazione

Moltiplicheremo subito 35 per 8, e avremo *lire* 280, che è il prezzo di braccia 35 a lire 8. Indi osserviamo che soldi 16 e denari 8 si possono decomporre in soldi 10, più soldi 6 e denari 8; ora, soldi 10 sono la *metà* d'nna lira: prenderemo dunque la metà di 35, il che dà $17 + \frac{1}{2}$, ossia *lire* 17 e *soldi* 10. — Per i soldi 6 e denari 8 prenderemo il terzo, perchè sono la *terza parte* d'una lira, ed avremo *lire* $11 + \frac{2}{3}$, ossia *lire* 11, *soldi* 13 e *denari* 4. — Rimangono i 10 soldi di braccio, e per questi prenderemo la *metà* del prezzo, cioè la metà di lire 8, soldi 16, denari 8, perchè mezzo braccio, costerà evidentemente la metà di questo prezzo; avremo così *lire* 4, *soldi* 8 e *denari* 4.

Sommando questi quattro prodotti parziali, si ha per resultato *lire toscane* 313, *soldi* 11 *e denari* 8.

317 In generale adunque, *se i fattori sono ambedue complessi, si moltiplicano fra loro le due parti intere; quindi sulla parte intera del moltiplicando si prendono le parti aliquote del moltiplicatore, e su tutto il moltiplicatore le parti aliquote del moltiplicando.*

Divisione.

318. Nella divisione dei numeri complessi si presentano due casi principali:

1.° *Il dividendo e il divisore sono della stessa natura.*

2.° *Il dividendo e il divisore sono di natura diversa.*

Spiegheremo la regola da seguirsi sopra due esempi.

Esempio 1.° — *Si sa che una libbra di seta è costata lire* 34, *soldi* 12 *e denari* 4; *si domanda quante libbre se ne avrebbero con lire* 154, *soldi* 15 *e denari* 4.

Soluzione

È chiaro che per risolvere il problema si dovranno dividere lire 154, soldi 15, e denari 4 per lire 34, soldi 12 e denari 4.

A tale oggetto ridurremo primieramente il dividendo e il divisore in unità dell' ultimo ordine, vale a dire in denari, moltiplicando le lire per 20 e aggiungendo al prodotto i soldi; quindi moltiplicando il resultato così ottenuto per 12, e unendo al prodotto i denari, come qui si vede:

Operazione

	Lire 154. S. 15. D. 4 :	Lire 34. S. 12. D. 4
Lire	$154 \times 20 + 15$	$34 \times 20 + 12$
Soldi	$3095 \times 12 + 4$	$692 < 12 + 4$
Denari	37141	8308 Denari

Ridotti così il dividendo e il divisore in denari, divideremo l'uno per l'altro i due numeri interi così ottenuti, e il quoziente esprimerà libbre; ecco il calcolo:

```
              37144   | 8308
1.° resto . .  3912   Lib. 4, Once 5, Denari 15. Gr. 14.
             × 12
             46944
2.° resto . .  5404
             × 24
            129696
             46616
3.° resto . .  5076
             × 24
            121824
             38744
4.° resto . .  5512
```

Il primo resto si è moltiplicato per 12, il secondo per 24 e il terzo per 24, onde ottenere al quoziente la frazione di libbra, cioè once, denari e grani. — Si conclude adunque che il numero o quoziente cercato, è *libbre* 4, *once* 5, *denari* 15 e *grani* 14 più una frazione $\frac{5512}{8308}$ di grano, trascurabile.

Esempio 2.° — *Deve distribuirsi una somma di lire* 326, *soldi* 13, *denari* 4 *in* 40 *persone; quanto toccherà a ciascuna?*

Soluzione

È evidente che bisogna dividere Lire 326, soldi 13, denari 4 per 40. — Perciò divideremo prima 326 per 40 e avremo *lire* al quoziente; moltiplicheremo poi il resto per 20, e il prodotto, aumentato dei soldi del dividendo, si dividerà per 40; il quoziente esprimerà *soldi;* finalmente moltiplicheremo il resto per 12, e il prodotto, aumentato dei denari del dividendo, si dividerà per 40; il quoziente esprimerà *denari.* Ecco il calcolo:

Operazione

```
          Lire 326, S. 13, D. 4     | 40
1.° resto . . . 6 × 20 + 13         Lire 8, S. 3, D. 4
              133
2.° resto . . 13 × 12 +  4
              160
               00
```

Dunque ogni persona avrà *lire toscane* 8, *soldi* 3 *e denari* 4.

Questi esempi chiariscono sufficientemente la regola da tenersi in tutti i casi analoghi.

PROBLEMI

sul calcolo dei numeri complessi.

207. Un tale spende lire toscane 1250, soldi 18, denari 8 all'anno; mette a parte lire 525, soldi 6, denari 8; qual'è la sua entrata?

R. — Lire toscane 1776, soldi 5, denari 4.

208. Un argentiere aveva libbre 15, once 10, denari 7 grani 8 d'argento in verga che fatto lavorare è ridotto libbre 14 once 11 denari 8 grani 20. — Domandasi qual sia il peso dell'argento prodotto.

R. — Libbre 0, once 10, denari 22, grani 12.

209. Si sono comprate libbre 10 di Cannella per lire toscane 194, soldi 16, denari 8; si domanda quanto è costata una libbra.

R. — Lire toscane 19 soldi 9 denari 8.

120. Si deve distribuire a 6 persone la somma di lire 136, soldi, 5 denari 8 — Si domanda quanto toccherà a ciascuna.

R. — Lire toscane 22, soldi 14, denari 3 $+ \frac{1}{3}$.

CONVERSIONE DELLE MISURE METRICHE-DECIMALI NELLE ANTICHE MISURE, E VICEVERSA.

Uso delle tavole di riduzione.

319. Per convertire le misure metriche in misure antiche, e queste in misure metriche, basta conoscere i rapporti che esistono fra esse; rapporti che i geometri hanno determinato con grande precisione. — Noi ci limiteremo alle misure toscane, e a quest'effetto poniamo qui una tavola dei rapporti fra le misure metriche e le antiche misure toscane. — Per la conversione delle altre misure già usate nel regno d'Italia e fuori, vedansi le Tavole di ragguaglio alla fine del libro.

Tav. 1.ª Misure di lunghezza

1 Metro vale Braccia 1, Soldi 14, Denari 3, ossìa Braccia 1, 7134.

1 Decametro = Br. 17, Sol. 2, Den. 8 $+ \frac{11}{50}$; o Br. 17, 134.

1 Ettometro = Br. 171, Sol. 6, Den. 10 + $\frac{1}{5}$; o Br. 171, 34.
1 Chilometro = Br. 1713, Sol. 8, Den. 6; o Br. 1713, 425.
1 Miriametro = Br. 17134, Sol. 5; o Br. 17134, 25.

Reciprocamente.

1 Denaro	vale	0*m*., 000243.
1 Soldo	=	0*m*., 029181.
1 Braccio	=	0*m*., 583626.
1 Miglio tosc.	=	1653*m*., 607.

Tav. 2.ª Misure di superficie.

1 Metro quad., o Centiara, vale Braccia quadre 2, 9358.
1 Ara, o 100 Metri quadri = 2 Pertiche, 9 Deche, 3 Braccia quadre, 5828.
1 Ettara, o 10000 Metri q. = 2 Quadrati, 9 Tavole, 3 Pertiche, 5 Deche, 8 Brac. quadre, 2865.

Reciprocamente.

1 Braccio quadro	vale	0are,0034.
1 Deca, o 10 Braccia quadre	=	0are,034.
1 Pertica, o 100 Braccia quad.	=	0are,34.
1 Tavola, o 1000 Braccia quad.	=	3are,40.
1 Quadrato, o 10000 Br. quad.	=	34are,06.

Tav. 3.ª Misure di volume.

1 Stero, o Metro cubo vale Braccia cube 5,030329.
1 Decastero, o 10 Steri = Braccia cube 50,30329.

Reciprocamente.

1 Braccio cubo	vale	0 steri, 198794.
1 Traino	=	0 steri, 397589.

Tav. 4.ª Misure di capacità.

(Pei liquidi)

1 Litro da vino	vale 1 Mezzetta, e 1 Quartuccio.
1 Decalitro, o 10 Litri	= 4 Fiaschi, 1 Mezzetta, 1 Quartuccio.
1 Ettolitro, o 100 Litri	= 2 Barili, 3 Fiaschi, 3 Mezzette, 1 Quartuccio.

Reciprocamente.

1 Fiasco da vino	vale 2 litri, 279.
1 Barile, o 20 Fiaschi	= 45 litri, 584.
1 Litro da olio	= 1 Mezzetta, 1 Quartuccio.
1 Decalitro	= 4 Fiaschi, 3 Mezzette.
1 Ettolitro	= 2 Barili, 15 Fiaschi, 3 Mezzette, 1 Quartuccio.

Reciprocamente.

1 Fiasco da olio	vale 2 litri, 089.
1 Barile, o 16 Fiaschi	= 33 litri, 428.

(Per gli aridi)

1 Litro da grano	vale 1 Mezzetta.
1 Decalitro, o 10 Litri	= 1 Quarto, 5 Mezzette.
1 Ettolitro, o 100 Litri	= 4 Staia, 3 Mezzette.

Reciprocamente.

1 Staio	vale 24 litri, 362.
1 Sacco, o 3 Staia	= 73 litri, 086.
1 Moggio, o 24 Staia	= 584 litri, 712.

Tav. 5.ª Misure di peso.

1 Grammo vale Grani $20 + \frac{89}{250}$.

1 Decagrammo = Denari 8 e 11 Grani.
1 Ettogrammo = Once 3, Denari 12, Grani 19.
1 Chilogrammo = Libbre 2, Once 11, Den. 8, Gr. 4 $+ \frac{83}{1\,00}$.

Reciprocamente.

1 Libbra vale 339 grammi, 542.
1 Oncia — 28 grammi, 295.

Tav. 6.ª Monete.

1 Lira italiana vale Lire toscane 1, Soldi 3, Denari 9.

Reciprocamente.

1 Lira Toscana vale Lire italiane 0, 84 c.

Coll'aiuto di queste tavole, e con quelle poste in fine del libro, resta facilissimo convertire le misure metriche in misure antiche, e reciprocamente.

Infatti, basta moltiplicare il numero dato pel rapporto respettivo indicato nelle tavole stesse.

Esempi.

1.° *Convertire* Braccia toscane 5 *in* Metri.

Nella 1.ª tavola si trova che 1 Braccio equivale a

$$0m.\ 583626;$$

basterà dunque moltiplicare questo numero per 5, ed avremo:

$$0m.,\ 583626 \times 5 = 2m.,\ 91813,$$

o 2*m.*, 918 millimetri, trascurando le altre cifre.

2.° *Ridurre* Braccia 32 $\frac{3}{4}$ in metri.

Convertiremo prima la frazione $\frac{3}{4}$ in decimale, e si avrà 75 centesimi di Braccio. Quindi, operando come sopra, avremo:

$$0{,}583626 \times 32{,}75 = 19{,}1137515,$$

ossia 19 metri, 114 millimetri, tascurando le altre cifre.

3.° *Ridurre* Metri 45 in Braccia.

Nalla 1.ª tavola si vede che 1 metro vale Br. 1,7134; quindi, moltiplicando questo numero per 45, avremo:

$$1{,}7135 \times 45 = \text{Braccia } 77,\ 103 \text{ millesimi},$$

che, ridotti in numero complesso, daranno 2 soldi e 1 denaro.

Dunque Metri 45 = Braccia 77, Soldi 2, Denari 1.

4.° *Convertire* Braccia quadre 30 in Metri quadrati.

Dalla 2.ª tavola rilevasi che 1 Braccio quadro equivale a 0 are, 0034; avremo dunque:

$$0{,}0034 \times 30 = 0{,}1020,$$

ossia 10 metri quadrati, 20 decimetri quadrati.

5.° *Ridurre* 23 Ettare in Quadrati.

Dalla stessa tavola si vede che 1 Ettara vale 2 Quadrati 9 Tavole, 3 Pertiche, 5 Deche, 8 Braccia quadre, 2865. — Essendo questa una misura decimale, avremo:

$$29358{,}2865 \times 23 = 675240{,}5895,$$

ossia 67 Quadrati, 5 Tavole, 2 Pertiche, 4 Deche, e una frazione di Braccio quadro.

6.° *Ridurre* Barili 35 da vino in Litri.

Dalla tavola 4.ª si ha che 1 Barile da vino equivale a 45 litri, 584; dunque:

$$45{,}584 \times 35 = 1595{,}441435,$$

ossia 1595 litri, 44 centilitri, trascurando le altre cifre.

7.° *Ridurre* Lire tosc. 12, Soldi 13, Denari 4 in Lire ital.

Soldi 13 e Denari 4, ridotti in frazione decimale, equivalgono a 66 centesimi; quindi:

$$12{,}66 \times 0{,}84 = \text{Lire italiane } 10{,}63 \text{ c.}$$

È inutile moltiplicare gli esempi, giacchè quelli esposti chiariscono bastantemente la regola da tenersi in tutti i casi analoghi.

PROBLEMI

Sulla conversione delle misure metriche in misure antiche, e reciprocamente.

211. Un cassiere deve pagare in Franchi una somma di Lire tosc. 785. — Trovare il valore corrispondente.

R. — Lire ital. o: Fr. 659, 40 c.

212. Da Pistoia a Firenze si contano Miglia toscane 20. — A quanti Chilometri equivalgono?

R. — Chilom 33. Metri 72, 14 c.

213. Valutare Barili 35 d'olio a Lire toscane 43 il Barile e trovare il valore corrispondente in Litri e Lire italiane.

R — Barili 35 = Litri 1169 98 e costano Lire toscane 1505.
= Lire italiane 1264, 20 c.

214. Si hanno 3 ettare. 68 are di terreno che costano Lire it. 32572. — A quanti Quadrati corrispondono? — Qual è il valore in Lire toscane?

R. — 3 Ettare 68 are = Quadrati 10 Tav. 8, Deche 3, Br. quad. 8.
— Lire it. 32572 = Lire toscane 38776, S. 3, D. 9 $+ \frac{5}{7}$.

215. Si ricevono dall' estero Litri 14840 di grano, del valore complessivo di Lire italiane 7000; domandasi a quante Staia corrispondono e qual sia il valore in Lire toscane.

R. — Litri 14840 = Staia 609, Mezzette 3, Quartucci 1. — Lire italiane 7000 = Lire toscane 8333, soldi 6, denari 8.

TEORIA DEI QUADRATI E DELLE RADICI QUADRATE.

Formazione dei quadrati.

320. Si forma il quadrato d'un numero intero o frazionario moltiplicando questo numero per sè stesso (vedi n.° 58).

Così il quadrato di 25, sarà $25 \times 25 = 625$.

Il quadrato di $\frac{3}{4}$, sarà $\frac{3}{4} \times \frac{3}{4} = \frac{9}{16}$; e il quadrato di 6, 3, sarà 6, 3 $\times$ 6, 3 = 39, 69.

Teoremi relativi ai quadrati.

321. Teorema 1.° — *Il quadrato della somma di due numeri è uguale al quadrato del primo, più due volte il prodotto del primo pel secondo, più il quadrato del secondo.*

Sia $a + b$ la somma di due numeri; io dico che il suo quadrato sarà:

$$(a + b)^2 = a^2 + 2\,(a \times b) + b^2.$$

Infatti, fare il quadrato di $a + b$ significa moltiplicare $a + b$ per $a + b$; e a quest'effetto basta (n.° 59) moltiplicare le due parti del moltiplicando per le due parti del moltiplicatore e sommare i resultati; dunque abbiamo:

$$(a + b)^2 = a \times a + a \times b + b \times a + b \times b;$$

ma $a \times a = a^2$; $a \times b + b \times a$
$= 2$ volte $a \times b$; e $b \times b = b^2$.

Quindi l'uguaglianza precedente può scriversi

$$(a + b)^2 = a^2 + 2\,(a \times b) \times b^2,$$

come bisognava dimostrare.

322. Corollario. 1.° — Se b è aguale a 1, l'equazione precedente diviene

$$(a + 1)^2 = a^2 + 2\,a + 1,$$

vale a dire che *quando un numero aumenta d'un'unità, il suo quadrato aumenta del doppio di questo numero, più* 1; o in altri termini, *la differenza fra i quadrati di due numeri interi consecutivi è uguale al doppio del più piccolo più* 1.

323. Corollario 2.° — Se $b = \frac{1}{2}$, si ha

$$\left(a + \frac{1}{2}\right)^2 = a^2 + a + \frac{1}{4},$$

vale a dire che *quando un numero aumenta d'una mezza unità, il quadrato aumenta di questo numero, più un quarto.*

324. Corollario 3.° — Supponendo che a rappresenti le diecine d'un numero e b le unità di questo numero, l'uguaglianza

$$(a + b)^2 = a^2 + 2\,(a \times b) + b^2$$

fa vedere che *il quadrato d'un numero composto di diecine e*

unità è uguale al quadrato delle diecine, più 2 volte il prodotto delle diecine per le unità, più il quadrato delle unità.

Esempio: $(87)^2 = (80 + 7)^2 = 80^2 + 2 \times 80 \times 7 + 7.^2$

325. Teorema 2.° — *Il quadrato di un prodotto è uguale al prodotto dei quadrati dei singoli fattori.*

Infatti, sia $a \times b \times c$ un prodotto qualunque; il suo quadrato sarà evidentemente $(a \times b \times c) \times (a \times b \times c)$, ovvero $a \times b \times c \times a \times b \times c$, oppure $a \times a \times b \times b \times c \times c$, ossia $a^2 \times b^2 \times c^2$, come si voleva dimostrare.

Così $(5 \times 3 \times 6)^2 = 25 \times 9 \times 36 = 8100$.

326. Corollario. 1.° — Se alcuni fattori sono potenze, per elevarle al quadrato basta raddoppiare i loro esponenti. — Così, il quadrato di a^5 sarà

$(a \times a \times a \times a \times a)^2 = a^2 \times a^2 \times a^2 \times a^2 \times a^2 = a^{10}$.

In generale, *la* ennesima *potenza d'un prodotto è uguale al prodotto delle* ennesime *potenze dei singoli fattori.*

Così $(7 \times 4)^3 = 7^3 \times 4^3 = 343 \times 64 = 21952$.

327. Corollario 2.° — *Per elevare un numero ad una potenza, il cui grado sia risolvibile in due o più fattori, si può formare prima la potenza del numero indicata da un fattore, poi formare la potenza del resultato indicata da un altro fattore* ec.

Così, $18^4 = (18^2)^2 = 324^2 = 104976$.

Parimente, $12^6 = (12^2)^3$, oppure $(12^3)^2$ ec.

Questo teorema somministra il mezzo di abbreviare la formazione delle potenze.

328. Relativamente e ciò che abbiamo detto al n.° 324 possiamo osservare che $(80)^2 = (8 \times 10)^2 = 8^2 \times 10^2 = 8^2 \times 100$; e $2 \times 80 \times 7 = 2 \times 8 \times 10 \times 7 = 2 \times 8 \times 7 \times 10$;

vale a dire che *il quadrato delle diecine è un numero di* centinaia *espresso da* 8^2, *e il doppio prodotto delle diecine per le unità è un numero di* diecine *espresso da* $2 \times 8 \times 7$.

Il quadrato di 87 può dunque ottenersi facendo l'addizione seguente delle tre parti di cui si compone:

$$6400 + 1120 + 49 = 7569.$$

329. Teorema 3.° — *Il quadrato di qualunque numero intero deve* necessariamente *terminare in una delle cifre* 0, 1, 4, 5, 6, 9.

Infatti, i quadrati dei primi dieci numeri sono: 1, 4, 9, 16, 25, 36, 49, 64, 81, 100.

Quindi se un numero termina in 2, 3, 7, 8, non può essere un quadrato perfetto.

330. Corollario. — I quadrati che terminano per *zero* o per 5, provengono da numeri che terminano respettivamente per *zero* o per 5. I quadrati, che terminano per 1, 4, 9, 6, provengono da numeri che terminano respettivamente per 1 o 9, per 2 o 8, per 3 o 7, per 4 o 6.

331. Teorema 4.° — *Il quadrato d' un numero, che termina con zero o con cifre decimali, termina con un numero doppio di zeri o di cifre decimali.*

È evidente che il quadrato d'un numero *intero*, che termina in cifra significativa, non può terminare nè per zero, nè per cifra decimale. Daltronde il quadrato di un numero, che termina per zero, o per cifra decimale, termina respettivamente con due zeri, o con due cifre decimali; il quadrato di un numero, che termina per due zeri, o per due cifre decimali, termina con quattro zeri, o con quattro cifre decimali ec. Dunque il quadrato d' un numero non può terminare nè con un numero impari di zeri, nè con un numero impari di cifre decimali.

332. Teorema 5.° — *Affinchè un numero intero sia quadrato perfetto, è* necessario *e* sufficiente *che tutti i suoi fattori primi abbiano esponenti pari.*

1.° Questa condizione è *necessaria.* — Infatti (n.° 326), il quadrato d'un numero risoluto in fattori primi, si forma raddoppiando gli esponenti dei fattori primi, i quali, per conseguenza, diventano tutti pari.

Così, $28^2 = (2^2 \times 7)^2 = 2^4 \times 7.^2$

2.° Questa condizione è *sufficiente*, perchè dividendo allora per 2 gli esponenti dei fattori primi, si forma un nuovo numero, che elevato al quadrato, riproduce il primo.

Così, dividendo per 2 gli esponenti dei fattori primi $2^4 \times 7^2$, si ha $2^2 \times 7 = 28$, che elevato al quadrato riproduce il numero dato 28^2.

333. Corollario. — *Un numero che ammette un divisore primo, senza esser divisibile pel suo quadrato, non può essere quadrato perfetto.*

Così, un quadrato non può essere divisibile per 2 senza esserlo per 4; non può essere divisibile per 3, senza esserlo per 9; per 5, senza esserlo per 25 ec.

334. Teorema 6.° — *Il quadrato d'una frazione irriducibile, è una frazione irriducibile, i cui termini sono quadrati.*

Infatti, consideriamo la frazione irriducibile $\frac{4}{5}$; si ha:

$$\left(\frac{4}{5}\right)^2 = \frac{4}{5} \times \frac{4}{5} = \frac{4 \times 4}{5 \times 5} = \frac{4^2}{5^2}.$$

Il quadrato della frazione proposta $\frac{4}{5}$ è una nuova frazione $\frac{4^2}{5^2}$, i cui termini sono quadrati; e questa frazione è irriducibile, perchè, se due numeri, come 4 e 5, sono primi fra loro, i loro quadrati, 4^2 e 5^2, sono pure primi fra loro (n.° 141).

335. Corollario. — *Non esiste alcun numero frazionario, il cui quadrato sia eguale a un numero intero.*

Infatti, qualunque numero frazionario può essere supposto ridotto alla sua più semplice espressione; il quadrato allora è un numero frazionario irriducibile, e per conseguenza, non può essere uguale a un numero intero.

ESERCZI

CVIII. Calcolare le seguenti espressioni:

$$4^3;\ 2^2;\ 6^3;\ 7^4;\ 8^3;\ 23^2;\ 28^3;\ 1462^2;$$

$$\left(\frac{7}{8}\right)^2;\left(\frac{8}{9}\right)^2;\left(\frac{7}{20}\right)^2;(8 \times 7 \times 5)^2;(5 \times 7 \times 20 \times 8)^2;$$

$$(5 \times 9)^3;(8 \times 11 \times 13)^4;(13^2)^2;(18^3)^2;$$

CIX. Verificare le uguaglianze:

$$37695^2 = 1420913025.$$

$$7563^3 = 432595802547.$$

$$(25 + 12)^2 = 25^2 + 2 \times 25 \times 12 + 12^2 = 1369.$$

RADICE QUADARTA
dei numeri interi.

336. La *radice quadrata* d'un numero proposto, è un secondo numero che, moltiplicato per sè stesso, riproduce il primo, che dicesi *radicando.*

Così; 4 è la radice quadrata di 16, perchè $4 \times 4 = 16$.

Per esprimere che bisogna cercare, o *estrarre,* la radice quadrata di un numero, si pone questo numero sotto il segno

$\sqrt{\ }$, che dicesi *radicale;* così $\sqrt{81}$, indica la radice quadrata di 81, che è 9, perchè $9 \times 9 = 81$, e si scrive: $9 = \sqrt{81}$.

337. Quando il numero dato non ha più di due cifre, si determina la sua radice per mezzo della tavola seguente, la quale contiene i quadrati dei primi dieci numeri:

RADICI	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
QUADRATI	1	4	9	16	25	36	49	64	81	100

Così, la radice quad. di 36 è 6; quella di 25 è 5 ec. — Se fosse domandata la radice di 28, si troverebbe che 28, essendo compreso fra 25 (quadrato di 5), e 36 (quadrato di 6), la sua radice è necessariamente compresa fra 5 e 6. Per conseguenza questa radice è uguale a 5, più una frazione, che è impossibile di valutare esattamente; in tal caso dicesi che la radice è *irrazionale*, o *incommensurabile*.

338. Ora osservando che i quadrati dei numeri

1, 10, 100, 1000, 10000. . . . .

sono 1, 100, 10000, 1000000, 100000000 . . . . , si vede che i numeri compresi fra 1 e 100, fra 100 e 10000ec., hanno la loro radice compresa fra 1 e 10, fra 10 e 100 ec., e che, per conseguenza, un numero composto di una o due cifre, ne avrà *una* alla sua radice; un numero composto di tre o quattro cifre, ne avrà *due*; un numero che contiene cinque o sei cifre, ne avrà tre, e così di seguito; dunque potremo sempre *a priori* determinare il numero delle cifre della radice quadrata di un numero qualunque.

339. Ciò posto, proponiamoci d' estrarre la radice quadrata dal numero 1156.

OPERAZIONE

11.5 6	34
9	64
2 5.6	4
0 0	256

DIMOSTRAZIONE.

Il numero 1156, essendo compreso fra 100 e 10000, la sua radice sarà compresa fra 10 e 100, ossia avrà due cifre (n.° 338), e si comporrà di *diecine* ed *unità*; per conseguenza il numero 1156 conterrà *il quadrato delle diecine della radice, più il doppio prodotto delle diecine per le unità, più il quadrato delle unità.*

Cominceremo dal determinare la cifra delle diecine; e a tal effetto osserveremo che diecine poste a quadrato, danno sempre centinaia (n.° 328): perciò la cifra delle diecine di radice

non può trovarsi nelle due cifre a destra, che separeremo con un punto. La parte restante 11 centinaia è dunque il quadrato delle diecine, o anche un numero più grande, a cagione dell' cccesso proveniente dalle centinaia delle altre parti del quadrato. Ora, poichè 11 è compreso fra i quadrati 9 e 16, la sua radice sarà compresa fra 3 e 4 (n.° 337); quindi la cifra delle diecine sarà 3, che scriveremo nell' angolo a destra. — Si farà il quadrato di 3 diccine, che è 9 centinaia, e lo sottrarremo dalle 11 centinaia; avremo di resto 2 centinaia, a destra delle quali *abbasseremo* le altre due cifre 56 del quadrato. Si avrà così il numero 256, il quale contiene ancora le altre due parti del quadrato, cioè: *il doppio prodotto delle diecine per le unità, più il quadrato delle unità.*

Il prodotto delle diecine per le unità essendo diecine (n.° 328), non può trovarsi nella cifra a destra, che perciò separeremo con un punto. Il numero a sinistra 25, contiene un prodotto, di cui l'uno dei fattori è il doppio delle diecine della radice, cioè 6, e l' altro fattore, le unità che si cercano. Ora sappiamo che, essendo dato un prodotto di due fattori e uno di questi fattori, si trova l' altro per mezzo della divisione: dunque, dividendo 25 diecine pel doppio delle diecine di radice 6, si avranno le unità; così si raddoppia la cifra 3 ottenuta in radice, e scrivesi 6 al disotto: il 6 in 25 vi è contenuto 4 volte; si pone il 4 alla destra del 6, si moltiplica il numero 64, così formato, per 4, e il prodotto si sottrae da 256; il resto nel nostro caso è *zero*. — È evidente che in questa moltiplicazione si forma contemporaneamente il quadrato delle unità (4×4) e il doppio prodotto delle diecine per le unità (60×4).

Si conchiude adunque che il numero 1156 è un quadrato perfetto, e che la sua radice è 34.

Infatti, $34^2 = 34 \times 34 = 1156$.

340. Questo ragionamento si applica a qualunque radicando di tre o quattro cifre. I tre esempi seguenti faranno meglio vedere l' andamento dell' operazione:

56 . 25	75	5.29	23	79.21	89
49	145	4	43	64	169
72 . 5	5	12.9	3	152.1	9
72 5	7	12 9	129	152 1	1521
0	25	0		0	

341. Quando il radicando ha più di quattro cifre, la radice ne ha più di due, ma si considera sempre come composta d' un certo numero di diecine e di unità; e la dimostrazione precedente, prendendo più generalità, resta la stessa in tutti i casi.

Esempio: — Debbasi estrarre la radice quadrata da 74529.

Operazione.

7.45.29	273
4	47
34.5	7
329	543
162.9	3
1629	
0	

Spiegazione.

Il numero 74529, essendo più grande di 10000, la sua radice è più grande di 100; ma essendo più piccolo di 1000000, la sua radice è più piccola di 1000; essa è quindi compresa fra 100 e 1000, ed ha per conseguenza tre cifre; si compone adunque d' un certo numero di diecine e di unità.

Il quadrato delle diecine non potendosi trovare che nelle centinaia del numero dato 74529, se ne separano le due ultime cifre a destra 29, e la questione è ridotta ad estrarre la radice quadrata da 745. Così siamo ricondotti al caso precedente. Estraendo la radice quadrata da 745, si troveranno 27 diecine. Raddoppiando il 27, si ha 54; si divide 162 per questo numero, e il quoziente 3, è la cifra delle unità della radice.

Dunque

$$\sqrt{74529} = 273.$$

Infatti, $273^2 = 273 \times 273 = 74529$.

342. Siamo ora in grado di enunciare la regola seguente:

Per estrarre la radice quadrata da un numero intero che ha più di due cifre, si decompone il numero dato in gruppi di due cifre, cominciando dalla destra, in modo che l'ultimo gruppo a sinistra può anche avere una sola cifra. Allora, quanti sono i gruppi, tante sono le cifre della radice che si cerca. Ciò fatto, si prende la radice del massimo quadrato contenuto nel primo gruppo a sinistra, e si scrive questa radice alla destra del numero proposto separandola da questo con una linea verticale. Indi si fa il quadrato di questa cifra, e si sottrae dal primo gruppo. — A destra del resto si abbassa il gruppo seguente, di cui si separa l'ultima cifra a destra con un punto. Si divide allora la parte che resta a sinistra

del punto pel doppio della radice ottenuta, e si scrive il quoziente a destra del doppio della radice: si moltiplica il numero così formato per questo quoziente, e si sottrae il prodotto dal primo resto, seguito dal secondo gruppo. — Si abbassa accanto al nuovo resto il gruppo seguente, di cui si separa ancora l' ultima cifra a destra con un punto. Si divide la parte che resta a sinistra del punto pel doppio della radice intera ottenuta, e scrivesi il quoziente a destra di questo doppio; poi si moltiplica il numero così formato per questa terza cifra, e si sottrae il prodotto dal secondo resto seguito dal terzo gruppo. — Si continua la stessa serie di operazioni, sino a che tutti i gruppi sieno stati abbassati.

Applichiamo questa regola ad un esempio.

Debbasi estrarre la radice quadrata da 107584.

Operazione. Spiegazione.

10.75.84	328
9	62
17.5	2
124	648
518.4	8
5184	
0	

Decomposto il numero in gruppi di due cifre ciascuno, si vede che la radice avrà tre cifre, perchè tre sono i gruppi — I massimo quadrato contenuto nel primo gruppo a sinistra 10, è 9, la cui radice è 3 che scrivesi nell' angolo a destra. Sottraendo 9 da 10 resta 1, alla destra del quale si abbassa il secondo gruppo 75, e si ha così il numero 175, di cui si separa con un punto l' ultima cifra a destra. Si raddoppia la cifra di radice 3 e si ha 6, che scrivesi sotto il 3. Il 6 nel 17 vi è contenuto 2 volte: si pone il 2 alla destra del 6, si moltiplica il numero 62 così formato per 2, e il prodotto 124 si sottrae da 175; il resto è 51. La seconda cifra di radice è dunque 2, che scrivesi alla destra di quella già ottenuta. Si abbassa l'ultimo gruppo 84 alla destra del resto 51, e si ha il numero 5184, di cui si separa con un punto l'ultima cifra a destra. Si raddoppia il numero 32 scritto in radice, e si ha 64; il 64 nel 518 vi è contenuto 8 volte; quindi si scrive l'8 alla destra del 64, si moltiplica il numero 648 così formato per 8; e il prodotto si sottrae da 5184: il resto è *zero*. Si conclude adunque che la radice di 107584 è 328.

$$\text{Infatti } 328^2 = 338 \times 328 = 107584.$$

343. Ora è da osservare: 1.° Che una cifra della radice è troppo piccola, quando il resto è più grande del doppio della radice, aumentato dell' unità (vedi n.° 322).

2.° Quando il doppio delle diecine della radice non è contenuto nel numero che resta a sinistra, dopo aver separata l'ultima cifra, si scrive zero alla radice e si abbassano le due cifre seguenti a destra del numero totale.

3.° Il numero, di cui si cerca la radice, è di rado un quadrato perfetto; e la regola che precede, fa allora conoscere la radice del massimo quadrato contenuto nel numero proposto. In questo caso dicesi che la radice si estrae *a meno di un' unità.*

RADICE QUADRATA

dei numeri decimali.

344. Regola. — *Per estrarre la radice quadrata da un numero decimale, quadrato perfetto, basta estrarne la radice nel modo ordinario,* fatta astrazione dalla virgola, *e separare sulla destra della radice trovata un numero di cifre uguale alla metà delle cifre decimali del numero dato.*

Infatti, debbasi estrarre la radice quadrata da 13, 69; trascurando la virgola si ha 1369, la cui radice quadrata è 37. Ma nel sopprimere la virgola si è reso il numero *cento volte* più grande: quindi la radice 37 è *dieci volte* più grande del vero; per conseguenza, onde avere la giusta radice, basta separare con una virgola l'ultima cifra a destra, e si ha

$$\sqrt{13,69} = 3,7.$$

Al modo stesso si troverà

$$\sqrt{803,1556} = 28,34.$$

RADICE QUADRATA

delle frazioni ordinarie.

345. Regola. — *Per estrarre la radice quadrata da una frazione ordinaria, i cui termini sono quadrati perfetti, basta estrarre la radice dal numeratore e dal denominatore, e dividere la prima per la seconda.*

Così $$\sqrt{\frac{9}{16}}=\frac{\sqrt{9}}{\sqrt{16}}=\frac{3}{4}.$$

Infatti, il quadrato d'una frazione si forma elevando al quadrato i suoi due termini; quindi l'estrazione di radice, che è l'operazione inversa, si effettua tanto sul numeratore che sul denominatore.

CALCOLO DELLE RADICI QUADRATE INCOMMENSURABILI, CON UNA DATA APPROSSIMAZIONE.

Radice quadrata approssimata dei numeri interi.

346. Regola. — *Per estrarre con una data approssimazione la radice quadrata da un numero intero, si moltiplica il numero dato pel quadrato del denominatore della frazione che indica il grado d'approssimazione; indi si estrae dal prodotto la radice quadrata a meno di un'unità, e si divide il resultato pel denominatore stesso.*

Esempio: — Debbasi estrarre la radice quad. da 27 *a meno* di $\frac{1}{7}$. — Basterà moltiplicare il 27 per 7^2 o 49; indi estrarre la radice quad. a meno di un'unità dal prodotto 1323, e dividere il resultato per 7. Effettuando il calcolo, si troverà $\frac{36}{7}$, o $5+\frac{1}{7}$, per la radice richiesta.

Infatti, riducendo in *quarantanovesimi* il numero 27, si ha

$$\sqrt{27}=\sqrt{\frac{27\times 49}{49}}=\frac{\sqrt{27\times 49}}{\sqrt{49}}=\frac{\sqrt{1323}}{7}=\frac{36}{7}=5+\frac{1}{7}.$$

In generale,

$$\sqrt{N} \text{ a meno di } \frac{1}{n}=\sqrt{\frac{N\times n^2}{n^2}}=\frac{\sqrt{N\times n^2}}{\sqrt{n^2}}=\frac{\sqrt{N\times n^2}}{n}.$$

Valutazione della radice quadrata in decimali.

347. Le radici quadrate dei numeri si valutano ordinariamente in decimali, applicando però la regola sopra esposta.

Esempio: — Debbasi estrarre la radice di 11 *a meno* d' $\frac{1}{10}$.

Avremo:

$$\sqrt{11}=\sqrt{\frac{11\times10^2}{10^2}}=\frac{\sqrt{1100}}{\sqrt{10^2}}=\frac{\sqrt{1100}}{10}=3,\ 3.$$

Similmente: $\sqrt{11}$ a meno d' $\frac{1}{100}$;

Avremo:

$$\sqrt{11}=\sqrt{\frac{11\times100^2}{100^2}}=\frac{\sqrt{110000}}{\sqrt{100^2}}=\frac{\sqrt{110000}}{100}=3,\ 31.$$

Così: $\sqrt{11}$ a meno d' $\frac{1}{1000}$;

Avremo:

$$\sqrt{11}=\sqrt{\frac{11\times1000^2}{1000^2}}=\frac{\sqrt{11000000}}{\sqrt{1000^2}}=\frac{\sqrt{11000000}}{1000}=3{,}316.$$

Dunque: *per estrarre la radice quadrata da un numero intero con un' approssimazione espressa in decimali, se ne estrae secondo la regola ordinaria la radice della parte intera; quindi si scrivono due zeri alla destra del resto, e continuando l'operazione, la cifra che si ottiene dovendo esprimere* DECIMI, *si scriverà, preceduta dalla virgola, di seguito alle altre già trovate. — Aggiungendo altri due zeri alla destra del nuovo resto, si otterrà la cifra dei* CENTESIMI; *e continuando nello stesso modo, si troveranno quante cifre decimali si vogliono, coll' aggiungere sempre due zeri alla destra dei resti successivi.*

Radice quadrata approssimata dei numeri decimali.

348. REGOLA. — *Per estrarre la radice quadrata da un numero decimale, che non sia quadrato perfetto, bisogna prima di tutto render pari il numero delle cifre decimali* (il che si ottiene aggiungendo uno zero); *poi si estrae la radice quadrata dal numero, come se fosse intero, senza guardare alla virgola, e si separa sulla destra della radice trovata, la metà delle cifre decimali che racchiude*

il numero dato. — *Volendo una maggiore approssimazione, bisogna aggiungere ancora tante coppie di zeri, quante cifre decimali si vogliono di più alla radice.*

Esempio 1.° — *Estrarre la radice quadrata da* 6, 817.

Poichè il numero 6, 817 non ha che tre cifre decimali, aggiungeremo uno zero alla destra per render pari il numero delle cifre decimali: indi, soppressa la virgola, si estrae la radice quadrata da 68170, secondo la regola ordinaria. Troveremo per radice 261, e sulla destra di questo numero si separeranno due cifre decimali, perchè quattro ne contiene il quadrato; la radice cercata sarà dunque 2, 61, *a meno d' un centesimo.*

Se la radice si volesse *a meno d' un millesimo,* basterebbe aggiungere due zeri alla destra del resto, e continuare l'operazione.

Questa regola resulta evidentemente dalla moltiplicazione dei numeri decimali. Infatti, per formare il quadrato d' un numero decimale, bisogna moltiplicare questo numero per sè stesso; ora, il prodotto deve avere tante cifre decimali, quante ne contengono i due fattori; e poichè in questo caso i due fattori sono uguali, il quadrato dovrà averne due, quando la radice ne ha una; dovrà averne quattro, quando la radice ne ha due, ec. — In generale, *il quadrato d' un numero decimale, deve sempre avere un numero di cifre decimali doppio della radice.* (n.° 331).

Esempio 2.° — *Estrarre la radice quad. da* 7, 2, *a meno d' un millesimo.*

Poichè si vogliono dei *millesimi* alla radice, bisogna che il quadrato abbia sei cifre decimali; aggiungeremo dunque cinque zeri alla destra del numero dato, e si avrà 7, 200000; si fa astrazione dalla virgola, ed estraendo la radice quadrata da 7200000, si troverà 2683, sulla destra del quale separeremo tre cifre decimali. La radice richiesta sarà dunque 2,683, *a meno* di un millesimo.

Così si troverà

$\sqrt{28,5} = 5,338.$ — $\sqrt{0,531} = 0,728$ circa.

Radice quadrata approssimata delle frazioni ordinarie.

349. Se il denominatore della frazione è un quadrato perfetto,

si può estrarre a meno di un' unità la radice quadrata dal numeratore e dividerla per quella del denominatore.

Così $\sqrt{\frac{28}{81}} = \frac{5}{9}$; $\sqrt{\frac{13}{64}} = \frac{3}{8}$.

Se nessuno dei termini della frazione è quadrato perfetto, si può convertire in un'altra frazione equivalente, il cui denominatore almeno sia un quadrato perfetto, moltiplicando i due termini della frazione pel suo denominatore. Quindi estrarre, come nel caso precedente, la radice dai due termini, prendendo quella del numeratore a meno d' un' unità.

Così $\sqrt{\frac{8}{15}} = \sqrt{\frac{8 \times 15}{15^2}} = \frac{\sqrt{120}}{\sqrt{15^2}} = \frac{\sqrt{120}}{15} = \frac{10}{15} = \frac{2}{3}$.

350. Volendo poi estrarre la radice quadrata da una frazione ordinaria a meno di una frazione $\frac{1}{n}$, si applica la regola dei numeri interi (vedi n.° 346).

Debbasi, per esempio, estrarre la radice quadrata da $\frac{75}{7}$ a meno d'$\frac{1}{12}$.

Moltiplicheremo $\frac{75}{7}$ pel quadrato del denominatore 12, o 144, e avremo $\frac{10800}{7}$, ovvero $1542 + \frac{6}{7}$. Ora, la radice quadrata a meno d'una unità di $1542 + \frac{6}{7}$ è 39.

Dunque la radice richiesta è $\frac{39}{12}$ o $\frac{13}{4}$.

Valutazione in decimali.

351. Regola. — *Per estrarre la radice quadrata da una frazione ordinaria con una data approssimazione espressa in decimali, si converte questa frazione in decimale* (n.° 232), *prendendo al quoziente tante cifre decimali, che sieno* il doppio *di quelle volute alla radice; e quindi si opera secondo la regola del* n.° 348.

Esempio 1.° — Debbasi estrarre la radice quadrata da $\frac{5}{7}$, *a meno d'un centesimo.*

Riducendo $\frac{5}{7}$ in frazione decimale, e prendendo **quattro** sole cifre, perchè due se ne vogliono in radice, si ottiene **0,7142**; da cui estraendo la radice, si trova **0,84**, che in frazione ordinaria equivale a $\frac{21}{25}$.

Esempio 2.° — Vogliasi la radice quadrata di $43+\frac{11}{19}$ *a meno d'un millesimo.*

Riducendo in numero frazionario,

si ha: $43+\frac{11}{19}=\frac{43\times19+11}{19}=\frac{828}{19}$.

Trasformando ora questa espressione in numero **decimale** e prendendo sei cifre dopo la virgola, perchè se ne vogliono **tre** in radice, si avrà, **43,578888**; da cui estraendo la radice, si ottiene **6,601.**

ESERCIZI

sulla estrazione della radice quadrata dei numeri interi, decimali, e delle frazioni ordinarie.

CX. Calcolare: $\sqrt{576}$; $\sqrt{1444}$; $\sqrt{625}$, $\sqrt{15129}$; $\sqrt{225625}$; $\sqrt{49056016}$; $\sqrt{2042678416}$. $\sqrt{10,24}$; $\sqrt{2005,056}$; $\sqrt{0,411}$; $\sqrt{3145,6}$.

$\sqrt{\frac{9}{81}}$; $\sqrt{\frac{4}{49}}$; $\sqrt{\frac{25}{36}}$; $\sqrt{\frac{25}{400}}$; $\sqrt{\frac{64}{25}}$.

CXI. Calcolare a meno d' $\frac{1}{100}$

$\sqrt{6,34}$; $\sqrt{984,7}$; $\sqrt{\frac{3}{7}}$; $\sqrt{\frac{4}{5}}$; $\sqrt{87323}$.

CXII. Calcolare a meno d' $\frac{1}{1000}$:

$$\sqrt{6\frac{1}{8}};\quad \sqrt{347\frac{1}{3}};\quad \sqrt{18};\quad \sqrt{43,023}.$$

CXIII. Calcolare a meno d' $\frac{1}{20}$:

$$\sqrt{\frac{5}{6}};\quad \sqrt{\frac{7}{29}};\quad \sqrt{\frac{13}{5}};\quad \sqrt{\frac{108}{48}}.$$

CXIV. Verificare le seguenti uguaglianze:

$$\sqrt{1607448649} = 40093.$$

$$\sqrt{285970396644} = 534762.$$

$$\sqrt{12088868379025} = 3476905.$$

$$\sqrt{\frac{(1,55)^2 - 1}{(1,54)^2 - 1}} = 1,0112 = 1 + \frac{1}{89}.$$

CXV. Il più grande dei numeri primi fin ora calcolato è dato dall' espressione $\sqrt{101836374142801}$; trovate questo numero.

PROBLEMI.

216. Qual è il numero che, moltiplicato per sè stesso, dà per prodotto 824464?

R. — Il numero cercato è 908.

217. Pel pavimento d'un salone sono stati impiegati 10404 mattoni quadrati; si vuol sapere quanti ve ne sono ad ogni lato, supponendo che esso sia di forma quadrata.

R. — N.° 102.

218. Un tratto di terra quadrato contiene 1521 alberi; quanti ve ne sono per ogni fila?

R. — Ve ne sono 39.

219. Un generale vuol disporre 4489 soldati in quadrato; si domanda quanti uomini di fronte dovrà porre ad ogni faccia del quadrato.

R. — Uomini 67.

220 — Una piazza pubblica, di forma quadrata, contiene 7843 metri quadrati di superficie. — Si vuol sapere quel'è la lunghezza d' un lato, a meno d' un decimetro.

R. — 88 metri, 5.

TEORIA DEI RAPPORTI E DELLE PROPORZIONI.

352. Si chiama, in generale, *rapporto* il resultato del confronto di due numeri o di due quantità della stessa specie. — Questo confronto può farsi in due maniere: per *sottrazione* o per *divisione*, secondochè si vuol conoscere la *differenza* o il *quoziente* di questi due numeri. Nel primo caso è chiamato *rapporto aritmetico* o *per differenza*, nel secondo *rapporto geometrico* o *per quoziente*.

Così il rapporto aritmetico fra 12 e 4 è 8, perchè $12 - 4 = 8$; il rapporto geometrico fra gli stessi numeri è 3, perchè $12 : 4 = 3$.

353. Si chiama *proporzione* la riunione di due rapporti uguali. — Una proporzione può essere *aritmetica* o *geometrica*, secondochè i due rapporti che la compongono sono aritmetici o geometrici. — Nel primo caso si chiama più comunemente *equidifferenza*; nel secondo, *equiquoziente* o semplicemente *proporzione*.

354. Si dice che quattro numeri sono in proporzione, quando il rapporto dei due primi è uguale al rapporto degli altri due.

355. Per indicare che quattro numeri, a, b, c, d formano un'equidifferenza, si è convenuto di scriverli così:

$$a . b : c . d, \text{ oppure } a - b = c - d;$$

nel primo caso si legge:

a sta a *b* come *c* sta a *d*;

nel secondo:

a meno *b* uguale a *c* meno *d*.

Per esprimere che quattro numeri, a, b, c, d, formano una proporzione, si scrive:

$$a : b :: c : d, \text{ oppure } \frac{a}{b} = \frac{c}{d};$$

nel primo caso si legge:

a sta a *b* come *c* sta a *d*;

nel secondo:

a diviso per *b* uguale a *c* diviso per *d*.

356. I quattro numeri che compongono una equidifferenza o una proporzione, si chiamano i *quattro termini della proporzione;* quelli dell'estremità, come a e d, prendono il nome di *estremi,* e quelli di mezzo, b e c, *medj.* — Il primo termine d'ogni rapporto si chiama *antecedente,* e il secondo *conseguente.*

Così nelle proporzioni

$$a.\ b:\ c.\ d, \quad \text{o} \quad a:\ b::\ c:\ d,$$

a e c sono gli antecedenti; b e d i conseguenti.

357. Quando in un'equidifferenza o in una proporzione i medj sono uguali fra loro, si dice che essi sono *medj proporzionali fra gli estremi,* e la proporzione prende il nome di *proporzione continua.*

Esempi: 8. 6: 6. 4 è un'equidifferenza continua, e il 6 dicesi *medio aritmetico.* Questa equidifferenza può scriversi anche così:

$$\div\ 8.\ 6.\ 4.$$

8: 4 : : 4: 2 è una proporzione continua, e il 4 chiamasi *medio geometrico* o *medio proporzionale.* Questa proporzione può scriversi anche così:

$$\dot{\dot{\div}}\ 8:\ 4:\ 2.$$

Proprietà delle equidifferenze.

358. Teorema 1.° — *In qualunque equidifferenza la somma degli estremi è uguale alla somma dei medj.*

Sia l'equidifferenza

$$a.\ b:\ c.\ d;$$

si vuol provare che

$$a + d = c + b.$$

Infatti, l'equidifferenza

$$a.\ b:\ c.\ d$$

può scriversi (n.° 355.)

$$a - b = c - d.$$

Aggiungendo $b + d$, ossia la somma dei conseguenti, ai due membri di questa uguaglianza, essa non resterà alterata, e si avrà:

$$a - b + (b + d) = c - d + (b + d).$$

Ora, nel primo membro $-b + b$ si annullano, come pure nel secondo si annullano $-d + d$; e resta:

$$a + d = c + b,$$

come bisognava dimostrare.

359. Teorema 2.° — Reciprocamente: *se quattro numeri son tali, che la somma di due sia uguale alla somma degli altri due, questi quattro numeri formano un' equidifferenza.*

Si abbiano i quattro numeri a, b, c, d, tali, che

$$a + d = c + b;$$

io dico che si avrà l'equidifferenza

$$a . b : c . d.$$

Infatti, se dai due membri dell'uguaglianza

$$a + d = c + b$$

si toglie la somma $b + d$, l'uguaglianza non resterà alterata, ed avremo:

$$a + d - (b + d) = c + b - (b + d);$$

ovvero: (Vedi n.° 91)

$$a + d - b - d = c + b - b - d.$$

Ma $+ d - d$ nel primo membro, e $+ b - b$ nel secondo si eliminano, e resta:

$$a - b = c - d; \text{ cioè } a . b : c . d,$$

che è quanto si voleva dimostrare.

360. Corollario. — Il Teorema 1° dà il modo di trovare uno dei termini di un' equidifferenza, quando gli altri tre sono conosciuti.

Infatti, supponiamo di avere

$$12 . 4 : 15 . x.$$

(x è il termine incognito).

Poichè la somma degli èstremi è uguale a quella dei medj, avremo:

$$x + 12 = 4 + 15.$$

Togliendo 12 dai due membri di questa uguaglianza, resterà

$$x = 4 + 15 - 12,$$

ovvero

$$x = 19 - 12 = 7,$$

che è il quarto termine richiesto. — Infatti:

$$12 + 7 = 4 + 15.$$

Dunque *per trovare un estremo di un' equidifferenza, basta fare la somma dei medj, e da questa sottrarre l' estremo cognito.*

Così da $20 . 5 : 16 . x$, si ricaverà

$$x = 5 + 16 - 20 = 1.$$

Abbiasi ora l'equidifferenza

$$8 . x : 15 . 13,$$

in cui l'incognita è un *medio*; poichè la somma dei medj è uguale a quella degli estremi, avremo:

$$x + 15 = 8 + 13;$$

e togliendo 15 dai due membri di questa uguaglianza, resterà

$$x = 8 + 13 - 15,$$

ovvero $x = 21 - 15 = 6$, che è il medio cercato.

Infatti, $8 + 13 = 6 + 15$.

Dal che si vede che *per trovare un medio di un'equidifferenza, basta sommare gli estremi, e togliere dalla somma il medio cognito.*

Così da $12 . 15 : x . 7$, si rileverà

$$x = 12 + 7 - 15 = 4.$$

Se l'equidifferenza è continua, per trovare un estremo basterà raddoppiare il medio aritmetico e dal resultato togliere l'estremo cognito.

Così, avendo $8 . 6 : 6 . x$,

si ottiene $x = 6 + 6 - 8 = 12 - 8 = 4$.

Se il termine richiesto è il medio aritmetico, basterà sommare gli estremi, e dividere la somma per 2.

Così, data l'equidifferenza continua

$$8 . x : x . 4,$$

avremo $x + x = 8 + 4$, cioè $2x = 12$;

ovvero, dividendo per 2 ambo i membri:

$$\frac{2x}{2} = \frac{12}{2}, \quad \text{o} \quad x = 6,$$

e è il medio artimetico richiesto. (1)

(1) Per analogia si chiama *media aritmetica* di più quantità la loro somma divisa pel loro numero; così il medio aritmetico dei numeri 9, 3, 7, 5 è $\frac{9 + 3 + 7 + 5}{4} = \frac{24}{4} = 6$.

ESERCIZI

sulle equidifferenze.

CXVI. Calcolare il termine incognito delle seguenti equidifferenze:

$4 . 6 : 10 . x$	$\frac{1}{2} . \frac{7}{8} : x . \frac{2}{5}$
$8 . 5 : x . 7$	$7 . x : x . 3$
$x . 9 : 11 . 8$	$15 . x : x . 3$
$8{,}5 . 4{,}16 : x . 7{,}3$	$\frac{3}{4} . x : x . \frac{4}{9}.$
$81{,}14 . x : 20 . 18{,}3$	

Proprietà delle proporzioni.

361. Teorema 1.° — *In ogni proporzione il prodotto degli estremi è uguale al prodotto dei medj.*

Sia la proporzione

$$a : b :: c : d;$$

si vuol provare che

$$a \times d = c \times b.$$

Infatti, la proporzione

$$a : b :: c : d$$

può porsi sotto la forma

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d}.$$

Moltipicando per $b \times d$, ossia pel prodotto dei conseguenti, i due membri di questa uguaglianza, i resultati saranno uguali, ed avremo:

$$\frac{a \times b \times d}{b} = \frac{c \times b \times d}{d};$$

sopprimendo nel primo membro il fattore comune b, e nel secondo il fattore comune d, resterà:

$$a \times d = c \times b,$$

come bisognava dimostrare.

362. Teorema 2.° — Reciprocamente: *se quattro numeri son tali, che il prodotto dei due primi è uguale al prodotto degli altri due, questi quattro numeri formano una proporzione.*

Si abbiano i quattro numeri a, b, c, d, tali, che $a \times d = c \times b$; io dico che si avrà la proporzione.

$$a : b :: c : d,$$

Infatti, se i due membri dell' uguaglianza

$$a \times d = c \times b$$

si dividono pel prodotto $b \times d$, l' uguaglianza non resterà alterata, ed avremo:

$$\frac{a \times d}{b \times d} = \frac{c \times b}{b \times d};$$

ora, sopprimendo nel primo membro il fattore comune d, e nel secondo il fattore comune b, resterà:

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d};$$

o, ciò che è lo stesso:

$$a : b :: c : d,$$

come si doveva dimostrare.

363. Corollario. 1.° — Il Teorema 1.° dà il modo di trovare un termine di una proporzione, di cui si conoscono gli altri tre.

Esempio. — Abbiasi la proporzione:

$$12 : 18 :: 16 : x.$$

Poichè il prodotto degli estremi è eguale a quello dei medj, si ha:

$$12 \times x = 18 \times 16;$$

dividendo questi due prodotti uguali per 12, coefficiente dell' incognita, i resultati saranno uguali, e si avrà:

$$\frac{12 \times x}{12} = \frac{18 \times 16}{12}; \quad \text{cioè} \quad x = \frac{18 \times 16}{12};$$

ed effettuando il calcolo:

$$x = \frac{288}{12} = 24,$$

che è il quarto termine richiesto.

Infatti, $12 \times 24 = 18 \times 16.$

Da ciò resulta che *per trovare un estremo di una proporzione, basta fare il prodotto dei medj, e dividerlo per l' estremo cognito.*

Così da $160 : 20 :: 80 : x$, si ricava:

$$x = \frac{20 \times 80}{160} = 10.$$

Se il termine che si cerca è un medio, come nell'esempio seguente: $16 : 4 :: x : 5$, si avrà: $x \times 4 = 16 \times 5$, ovvero, dividendo per 4 i due membri: $x = \frac{16 \times 5}{4} = 20$, che è il medio richiesto. — Infatti, $16 \times 5 = 4 \times 20$.

Dunque, *per trovare un medio di una proporzione, basta fare il prodotto degli estremi, e dividerlo pel medio cognito.*

Se la proporzione è continua, come

$$8 : 4 :: 4 : x,$$

si ha ugualmente:

$$8 \times x = 4 \times 4;$$

ovvero

$$8 \times x = 4^2;$$

e dividendo per 8 i due membri:

$$x = \frac{4^2}{8},$$

cioè

$$x = \frac{16}{8} = 2.$$

Per trovare dunque *un estremo di una proporzione continua, bisogna fare il quadrato del medio geometrico, e dividerlo per l' estremo noto.*

Se il termine incognito è il medio geometrico, come

$$8 : x :: x : 2,$$

si ottiene

$$x \times x = 8 \times 2,$$

ovvero

$$x^2 = 8 \times 2;$$

ora estraendo la radice quadrata da ambi i membri, resterà:

$$x = \sqrt{8 \times 2} = \sqrt{16} = 4,$$

che è il medio geometrico cercato.

Quindi si vede che *per trovàre il medio geometrico, basta estrarre la radice quadrata dal prodotto degli estremi.*

364. Corollario 2.° — Dal Teorema 2.° si deduce che ad una proporzione si potranno far subire tutti quei cangiamenti, i quali non alterano l' uguaglianza fra il prodotto dei medj e quello degli estremi. — Così in una proporzione qualunque si potranno mettere gli estremi in luogo dei medj, e viceversa, il che si esprime colla parola *alternando*; e si potranno cambiare di posto gli estremi e i medj fra loro, il che si esprime colla parola *invertendo.* — Dunque una proporzione si potrà scrivere negli otto modi seguenti:

alternando . . . . $\begin{cases} a : b :: c : d \\ a : c :: b : d \\ d : b :: c : a \\ d : c :: b : a \end{cases}$

invertendo . . . . $\begin{cases} c : d :: a : b \\ c : a :: d : b \\ b : d :: a : c \\ b : a :: d : c. \end{cases}$

Queste otto proporzioni saranno vere, perchè in tutte si ha $a \times d = b \times c$, cioè il prodotto degli estremi uguale al prodotto dei medj.

ESERCIZI

Sulle Proporzioni.

CXVII. Calcolare il quarto termine delle proporzioni seguenti :

$4 : 2 :: 6 : x$	$5,37 : 19 :: x : 12,47$
$4 : 12 :: x : 18$	$\frac{4}{5} : \frac{1}{2} :: \frac{2}{7} : x$
$10 : x :: 16 : 8$	$x : 2\frac{3}{8} :: 7 : 4\frac{3}{11}$
$215 : 26 :: 133 : x$	$\frac{1}{9} : x :: 12 : \frac{4}{5}$.
$8 : x :: x : 2$	
$40 : x :: x : 10$	
$20 : 10 :: 10 : x$	

CXVIII. Verificare se i numeri $\frac{32}{7}$, $\frac{5}{19}$, 13 e $\frac{455}{718}$ sono in proporzione.

Altre proprietà delle Proporzioni.

365. Le proporzioni offrono altre proprietà, che hanno le loro applicazioni in Geometrìa; le più utili sono le seguenti :

366. Teorema 3.° — *Si può, senza alterare una proporzione, moltiplicare o dividere i termini o del primo o del secondo rapporto per uno stesso numero.*

Infatti, ogni rapporto è rappresentato da una frazione, di cui si possono moltiplicare o dividere i due termini per uno stesso numero, senza alterarne il valore (vedi n.° 165). Dunque, poichè il rapporto non cambia, la proporzione esiste sempre.

Così le due proporzioni

$$a : b :: c : d,$$
$$a \times m : b \times m :: c : d,$$

sono equivalenti.

367. Teorema 4.° — *In ogni proporzione la somma o la differenza dei due primi termini sta al secondo, come la somma o la differenza dei due ultimi sta al quarto.*

Sia la proporzione

$$a : b :: c : d;$$

bisogna provare che

$$a + b : b :: c + d : d$$
$$a - b : b :: c - d : d.$$

Per dimostrare questa verità, scriviamo la proporzione data sotto la forma

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d}.$$

Aumentando o diminuendo i due membri di questa uguaglianza di una unità, essa non rimane alterata; potremo dunque scrivere:

$$\frac{a}{b} + 1 = \frac{c}{d} + 1,$$
$$\frac{a}{b} - 1 = \frac{c}{d} - 1;$$

e riducendo allo stesso denominatore, si ottiene

$$\frac{a+b}{b} = \frac{c+d}{d},$$
$$\frac{a-b}{b} = \frac{c-d}{d};$$

ovvero

$$a + b : b :: c + d : d$$
$$a - b : b :: c - d : d,$$

come bisognava dimostrare.

368. Nella proporzione precedente, nel caso in cui si prende la differenza dei due termini, si suppone che a e c sieno più grandi di b e d.

Se ciò non fosse, si effettuerebbe la trasformazione nel modo seguente:

$$1+\frac{a}{b}=1+\frac{c}{d},$$

$$1-\frac{a}{b}=1-\frac{c}{d};$$

e, per conseguenza,

$$\frac{b+a}{b}=\frac{d+c}{d},$$

$$\frac{b-a}{b}=\frac{d-c}{d},$$

ovvero

$$b+a : b :: d+c : d,$$

$$b-a : b :: d-c : d. \text{ (1)}$$

369. Teorema 5.° — *In qualunque proporzione la somma o la differenza degli antecedenti, sta alla somma o alla differenza dei conseguenti, come ogni antecedente sta al suo conseguente.*

Sia la proporzione

$$a : b :: c : d;$$

si vuol provare che

$$a+c : b+d :: c : d,$$

e

$$a-c : b-d :: c : d.$$

Infatti, alternando i medj nella proporzione proposta si ha:

$$a : c :: b : d;$$

la quale, pel teorema precedente, diviene:

$$a+c : c :: b+d : d,$$

e

$$a-c : c :: b-d : d.$$

Ora, alternando nuovamente i medj; si ha:

$$a+c : b+d :: c : d,$$

e

$$a-c : b-d :: c : d;$$

ciò che bisognava dimostrare.

370. Teorema 6°. — *In un seguito di rapporti uguali, la somma degli antecedenti, sta alla somma dei conseguenti, come un antecedente sta al suo conseguente.*

(1) Il paragonare in una proporzione la somma dei due termini di ciascun rapporto coi respettivi antecedenti o conseguenti. s'indica colla parola *componendo*: il paragonare la differenza si esprime colla parola *dividendo*.

Si abbiano i rapporti uguali

$$a : b :: c : d :: e : f :: g : h \text{ ec.}$$

In virtù del teorema precedente, dall'uguaglianza dei primi due rapporti si ha:

$$a + c : b + d :: c : d;$$

sostituendo al rapporto $c : d$ il suo uguale $e : f$, avremo:

$$a + c : b + d :: e : f:$$

la quale per lo stesso teorema diviene:

$$a + c + e : b + d + f :: e : f.$$

Sostituendo al rapporto $e : f$ il suo uguale $g : h$, si ottiene

$$a + c + e : b + d + f :: g : h;$$

da cui:

$$a + c + e + g : b + d + f + h :: g : h,$$

ciò che bisognava dimostrare.

371. Teorema 7.° — *Se due proporzioni hanno un rapporto comune, gli altri due rapporti formano una proporzione.*

Sieno, infatti, le due proporzioni:

$$a : b :: c : d,$$
$$e : f :: c : d;$$

i due rapporti $\frac{a}{b}$ e $\frac{e}{f}$, essendo uguali allo stesso rapporto $\frac{c}{d}$, sono evidentemente uguali fra loro (1), e si ha

$$\frac{a}{b} = \frac{e}{f},$$

o, ciò che è lo stesso:

$$a : b :: e : f.$$

372. Teorema 8.° — *Moltiplicando termine a termine due o più proporzioni, i prodotti che ne risultano sono sempre in proporzione.*

Sieno le due proporzioni

$$a : b :: c : d,$$
$$l : m :: n : o;$$

vogliamo dimostrare che moltiplicandole termine a termine, si formerà la proporzione:

$$a \times l : b \times m :: c \times n : d \times o.$$

(1) Per l'assioma: *due quantità uguali ad una terza sono uguali fra loro.*

Infatti, le due proporzioni date si possono porre sotto la forma:

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d}; \text{e} \frac{l}{m} = \frac{n}{o};$$

ora, poichè le due frazioni $\frac{a}{b}$ e $\frac{l}{m}$ sono respettivamente uguali alle frazioni $\frac{c}{d}$ e $\frac{n}{o}$, è chiaro che il prodotto di $\frac{a}{b}$ per $\frac{l}{m}$ sarà uguale a quello di $\frac{c}{d}$ per $\frac{n}{o}$; vale a dire che

$$\frac{a}{b} \times \frac{l}{m} = \frac{c}{d} \times \frac{n}{o},$$

ovvero
$$\frac{a \times l}{b \times m} = \frac{c \times n}{d \times o};$$

il che equivale alla proporzione

$$a \times l : b \times m :: c \times n : d \times o;$$

come si doveva dimostrare.

Il ragionamento sarebbe lo stesso, quando si considerassero più di due proporzioni.

373. Corollario. — Se le due proporzioni sono identiche, come le seguenti:

$$a : b :: c : d$$
$$a : b :: c : d,$$

moltiplicandole termine a termine, si ottiene:

$$a \times a : b \times b :: c \times c : d \times d;$$

ossia
$$a^2 : b^2 :: c^2 : d^2;$$

dal che si deduce che *se quattro numeri sono in proporzione, inalzati ad una stessa potenza, sono sempre in proporzione.*

374. Teorema 9.° — *Due proporzioni, divise termine a termine, dànno quattro quozienti, i quali formano una proporzione.*

Si abbiano le due proporzioni:

$$a : b :: c ; d,$$
$$m : n :: p : q.$$

Dalla prima si ha:

$$a \times d = c \times b,$$

e dalla seconda

$$m \times q = p \times n.$$

Dividendo membro a membro queste due uguaglianze, i quozienti saranno uguali, e si ottiene:

$$\frac{a \times d}{m \times q} = \frac{c \times b}{p \times n}; \text{ ossia: } \frac{a}{m} \times \frac{d}{q} = \frac{c}{p} \times \frac{b}{n};$$

da cui (vedi n.° 362):

$$\frac{a}{m} : \frac{b}{n} :: \frac{c}{p} : \frac{d}{q};$$

il che bisognava dimostrare.

375 Teorema 10.° — *Se quattro numeri sono in proporzione, anche le loro radici dello stesso grado sono in proporzione.*

Sia la proporzione:

$$a : b :: c : d; \quad \text{ovvero } \frac{a}{b} = \frac{c}{d}.$$

Estraendo la radice *emmesima* dai due membri di questa uguaglianza, si ha:

$$\sqrt[m]{\frac{a}{b}} = \sqrt[m]{\frac{c}{d}}, \text{ ovvero (n.° 345): } \frac{\sqrt[m]{a}}{\sqrt[m]{b}} = \frac{\sqrt[m]{c}}{\sqrt[m]{d}};$$

il che equivale alla proporzione:

$$\sqrt[m]{a} : \sqrt[m]{b} :: \sqrt[m]{c} : \sqrt[m]{d}.$$

376. Il teorema 6.° (n.° 370) dà il modo di risolvere il seguente problema:

Dividere un numero qualunque N in parti proporzionali a numeri dati a, b, c, d. . . . . .

Infatti, supponiamo di dover dividere il numero 360 in parti proporzionali ai numeri 5, 12, 9.

Si tratta di trovare tre numeri, che chiameremo x, y, z, tali che si abbia:

$$\frac{x}{5} = \frac{y}{12} = \frac{z}{9};$$

e

$$x + y + z = 360.$$

Ora le uguaglianze $\frac{x}{5} = \frac{y}{12} = \frac{z}{9}$ si possono porre sotto la forma

$$x : 5 :: y : 12 :: z : 9;$$

da cui, in virtù del teorema 6°,

$$x + y + z : 5 + 12 + 9 : : x : 5,$$
$$x + y + z : 5 + 12 + 9 : : y : 12,$$
$$x + y + z : 5 + 12 + 9 : : z : 9.$$

Ma $x + y + z$ è uguale a 360; quindi sostituendo questo valore nelle tre proporzioni precedenti, si ha:

$$360 : 5 + 12 + 9 :: x : 5,$$
$$360 : 5 + 12 + 9 :: y : 12,$$
$$360 : 5 + 12 + 9 :: z : 9;$$

dalle quali (vedi n.° 363) si ottiene:

$$x = \frac{360 \times 5}{5 + 12 + 9},$$
$$y = \frac{360 \times 12}{5 + 12 + 9},$$
$$z = \frac{360 \times 9}{5 + 12 + 9}.$$

Ed effettuando le operazioni indicate, si troverà

$$x = 69 + \frac{3}{13}; y = 166 + \frac{2}{13}; z = 124 + \frac{8}{13}.$$

Così il numero dato 360 è diviso in proporzione dei numeri 5, 12, 9.

Infatti; $69 \frac{3}{13} + 166 \frac{2}{13} + 124 \frac{8}{13} = 360.$

Questo problema ha molte applicazioni, come vedremo in seguito.

ESERCIZI.

CXIX. Riconoscere le proprietà dimostrate nei teoremi precedenti sopra proporzioni numeriche.

CXX. Trovare un medio proporzionale fra 3 e 48.

CXXI. Dividere il numero 740 in proporzione ai numeri 20, 15, 18.

CXXII. Fare del numero 1540 quattro parti, che stieno fra loro come 2 : 5 : 8 : 13.

CXXIII. Dividere il numero 66000 in proporzione ai numeri $\frac{1}{5}, \frac{2}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{2},$

APPLICAZIONE DELLA TEORIA DEI RAPPORTI.

Quantità direttamente e inversamente proporzionali.

377. Si dice che due grandezze sono *direttamente proporzionali* l' una all' altra, o semplicemente *proporzionali*, o *in rapporto diretto*, quando crescendo o diminuendo la prima, cresce o diminuisce la seconda nello stesso rapporto ; o in altre parole, quando il rapporto di due valori qualunque della prima, è uguale al rapporto *diretto* dei due valori corrispondenti della seconda.

Esempio : Il numero di operai è *proporzionale* al lavoro, perchè crescendo o diminuendo il numero di essi, anche il lavoro corrispondente cresce o diminuisce nelle stesse circostanze.

Due grandezze sono *inversamente proporzionali* l' una all' altra, quando crescendo o diminuendo la prima, diminuisce o cresce la seconda nello stesso rapporto; o in altre parole, quando il rapporto di due valori qualunque della prima è uguale al rapporto *inverso* dei due valori corrispondenti della seconda.

Esempio : Il numero di operai è *inversamente proporzionale* al tempo; perchè se il numero degli operai cresce, il tempo diminuisce; se il numero degli operai diminuisce ; il tempo cresce.

Regola del tre semplice.

378. *La* REGOLA DEL TRE *è quella operazione la quale ha per oggetto di trovare il termine incognito d' una proporzione, quando si conoscono gli altri tre termini.* — Essa è *diretta* o *inversa*, secondochè le grandezze considerate sono direttamente o inversamente proporzionali.

379. Tutti i problemi relativi alla regola del tre possono risolversi in due modi : o colle proporzioni, o col metodo detto di *riduzione all' unità*, come resulterà dai seguenti esempi.

Esempio 1.° — *Se* 3 *operai hanno fatto* 24 *metri di lavoro*, 11 *operai quanto ne faranno nello stesso tempo ?*

1.° Metodo. Chiamando x il numero dei metri richiesto, i dati del problema si sogliono scrivere in modo che gli omogenei, cioè della stessa specie, sieno l' uno sotto l' altro, come segue:

Operai	Metri
3	24
11	x

Cio fatto, diremo: poichè 3 operai hanno fatto 24 metri, è evidente che 11 operai ne faranno di più; dunque fra i due numeri di operai e i due numeri di metri esiste lo *stesso rapporto*, e la regola del tre è diretta. — Scriveremo perciò l' uguaglianza

$$\frac{3}{11} = \frac{24}{x}, \quad \text{ossìa} \quad 3 : 11 :: 24 : x,$$

da cui (n.° 363):

$$x = \frac{11 \times 24}{3} = 88 \text{ metri.}$$

Dunque se 3 operai fanno 24 metri di lavoro, 11 operai ne faranno 88.

2.° Metodo. Scritti i dati del problema come sopra, cioè

Operai	Metri
3	24
11	x

diremo: se 3 operai fanno 24 metri di lavoro, 1 operaio ne farà la *terza parte* di 24, cioè $\frac{24}{3} = 8$ metri; e, per conseguenza, 11 operai ne faranno 11 volte più, vale a dire $8 \times 11 = 88$ metri, come sopra.

Questo secondo metodo, appoggiato al semplice ragionamento, dicesi di *riduzione all' unità*, perchè consiste nel trovare in ogni caso il valore di un' unità, e da questo dedurre il valore delle unità date.

Esempio 2.° — 8 *Operai hanno fatto un lavoro in* 15 *giorni; in quanto tempo lo avrebbero fatto* 12 *operai?*

1.° Metodo. Disporremo come sopra i dati così:

Operai	Giorni
8	15
12	x

e si dice: poichè 8 operai impiegano 15 giorni nel fare un dato

lavoro, 12 operai vi impiegheranno un tempo minore; dunque il rapporto dei due numeri di operai è uguale al rapporto *inverso* dei due numeri di giorni, e la regola del tre è inversa. — Avremo perciò l'uguaglianza:

$$\frac{8}{12} = \frac{x}{15}, \quad \text{ossìa} \quad 8 : 12 :: x : 15;$$

da cui (n.° 363):

$$x = \frac{8 \times 815}{12} = 10 \text{ giorni.}$$

Dunque se 8 operai impiegano 15 giorni a fare un lavoro, 12 operai ve ne impiegheranno soltanto 10.

2.° Metodo. Disposti i dati come sopra, diremo:

Se 8 operai impiegano 15 giorni, 1 operaio v'impiegherà 8 volte più tempo, ossìa $15 \times 8 = 120$ giorni; per conseguenza, 12 operai v'impiegheranno un tempo 12 volte minore, ossìa $\frac{120}{15} = 10$ giorni.

380. Dagli esempi addotti resulta che ogni problema, risolvibile colla regola del tre semplice, contiene sempre tre termini, di cui due sono di una stessa specie, ed il terzo di specie differente, ma sempre però omogeneo col quarto che si cerca; e per risolvere tale problema colle proporzioni, *si dispongono i termini omogenei l'uno sotto l'altro, si scrivono i rapporti dei termini della stessa specie e si uguagliano; avvertendo però che, se i due rapporti sono inversi, bisogna invertire i termini di uno di essi,* come resulta *dal* 2° esempio.

381. Risolviamo ancora per maggior chiarezza i due seguenti problemi:

Esempio 3.° — *Una fabbrica ha consumato* 37000 *chilogr. di carbone per produrre* 26700 *chilogr. di porcellana. Quanto carbone consumerebbe per produrre* 75350 *chilogr. di porcellana?*

1.° Metodo.

Chilogr. di Carbone	Chilogr. di Porcellana
37000	26700
x	75350

Se in 26700 chilogr. di porcellana si consumano 37000 chilogrammi di carbone, in 75350 chilogrammi di porcellana si consumerà una quantità maggiore di carbone: i rapporti sono

dunque diretti, e si avrà:

$$\frac{37000}{x} = \frac{26700}{75350}\text{; ossia } 37000 : x :: 26700 : 74350\text{; da}$$

$$\text{cui } x = \frac{37000 \times 75350}{26700} = 104417 \text{ chilogr., 61 decagrammi}$$

circa, di carbone.

2.° Metodo. Per risolvere il problema proposto, diremo: poichè per produrre 26700 chilogr. di porcellana sono stati necessari 37000 chilogr. di carbone, per 1 chilogr. di porcellana saranno necessari $\frac{37000}{26700}$ di chilogr.; dunque, per 75350 chilogr. di porcellana ne bisogneranno chilogr. $\frac{37000 \times 75350}{26700}$, ossia 104417 chilogrammi, 61 a meno d'un centesimo, come sopra.

Esempio 4.° — 16 *operai hanno impiegato ore* 12, *minuti 10 a fare un lavoro; quanti operai sarebbero necessari per fare lo stesso lavoro in ore* 4, *minuti* 52?

1.° Metodo. Riducendo le ore in minuti, si ha:

Operai	Minuti
16	730
x	292

Ora, se il lavoro è stato fatto in 730 minuti da 16 operai, per farlo in 292 minuti, ossia in *meno* tempo, occorre un numero *maggiore* d'operai; i rapporti sono dunque inversi, e si ha:

$$\frac{x}{16} = \frac{730}{292}\text{; cioè } x : 16 :: 730 : 292;$$

$$\text{d'onde} \quad x = \frac{730 \times 16}{292} = \text{Operai } 40.$$

2.° Metodo. Se in 730 minuti il lavoro è stato fatto da 16 operai, per farlo in 1 minuto è necessario un numero d'operai 730 volte maggiore, cioè 730 × 16, e quindi per farlo in 292 minuti occorrerà un numero d'operai 292 volte minore, cioè $\frac{730 \times 16}{292}$, ossia 40 operai, come sopra.

---

399. Tal che si vede che *per trovare la* TASSA, *si moltiplica l' interesse per* 100, *e il prodotto si divide pel capitale moltiplicato per il tempo;* la qual regola tradotta in formula, dà

$$r = \frac{i \times 100}{c \times t}.$$

Applicazione. — *Un capitale di lire* 3750 *ha prodotto un interesse di lire* 719,25 *c. in* 2 *anni e* 6 *mesi. Si domanda a qual tassa fu impiegato il capitale.*

Qui abbiamo:

$$i = 719{,}25;\ c = 3750;\ t = \frac{30}{12}\text{ d'anno, o }\frac{5}{2};$$

$$\text{Quindi: } r = \frac{719{,}25 \times 100}{3750 \times \frac{5}{2}} = \frac{71925}{\left(\frac{18750}{2}\right)} = \frac{71925 \times 2}{18750}$$

$=$ L. 7, 67 circa per la tassa cercata.

400. Da ciò che precede resulta che la regola d'interesse dà luogo a quattro problemi differenti, i quali si risolvono facilmente colle formule trovate, e che qui riportiamo:

Formula per calcolare l'*interesse*: $i = \dfrac{c \times r \times t}{100}$.

—— per calcolare il *tempo*: $t = \dfrac{i \times 100}{c \times r}$.

—— per calcolare il *capitale*: $c = \dfrac{i \times 100}{r \times t}$.

—— per calcolare la *tassa*: $r = \dfrac{i \times 100}{c \times t}$;

le quali ultime tre si deducono dalla prima nel modo seguente: per avere la 2ª, basta moltiplicare i due membri della prima uguaglianza per 100, e dividerli per $c \times r$; per ottenere la 3ª, basta moltiplicare i due membri della prima per 100, e dividerli per $r \times t$; per avere la 4ª, basta moltiplicare i due membri della prima per 100 e dividerli per $c \times t$.

PROBLEMI

sulla regola d'interesse semplice (1).

250. Qual'è l'interesse annuo di lire 430, alla tassa del 5 per 100 l'anno?

R. — Lire 21, 50 c.

251. Qual' è l' interesse annuo di lire 260 al 5, 50 per 100?

R. — 14, 30 c.

252 Qual' è l' interesse di lire 845, durante 3 mesi, alla tassa del 5 per 100 l' anno?

R. — Lire 10, 56 c circa.

253. Un capitale di lire 2580 è stato impiegato per 5 mesi e 10 giorni al 4 per 100; quale interesse ha prodotto?

R. — Lire 45, 86 c. circa.

254. Si domanda l' interesse di una somma di lire 650 per 3 anni e 7 mesi, a ragione del 5, 75 per 100.

R. — Lire 133, 92 c. circa

255. Qual è l' interesse di lire 324, in 15 giorni, alla tassa del 6 per 100 l' anno?

R. — Lire 0, 81 c.

256. Fu data ad interesse una somma di lire 986. per 2 mesi e 16 giorni al 3. 50 per 100; quale interesse ha prodotto?

R — Lire 7, 29, c.

257 Un operaio, che ha portato una somma di lire 200 alla cassa di risparmio, la ritira dopo 9 mesi e 25 giorni — Quanto riceverà, sapendo che l' interesse è pagato al 4 per 100?

R. — Lire 206, 55 c circa.

258. Si danno ad interesse lire 1457,14 e al 6 per 100. — Domandasi qual frutto daranno in 2 anni e 4 mesi.

R. — Lire 203,999 . . . o L. 204 circa.

259. Quanto tempo è necessario affinchè una somma di lire 1410 produca, al 5 per 100 l' anno, un interesse di lire 182?

R. — Anni 2, mesi 6, giorni 29 $+ \frac{17}{47}$.

260. Un tale dette a frutto al 6 per 100 una somma di lire 950, e gli furono restituite lire 1230. Si domanda quanto tempo tenne impiegata la somma?

R — Anni 4, mesi 10, giorni 23 $+ \frac{8}{19}$.

(1) Vedi la nota a pag 253.

261. Si dettero a cambio al 4 per 100 lire 1550, e dopo un certo tempo si ritirarono tra capitale e interesse lire 1922; quanti anni restò impiegato il capitale?

R. — Anni 6.

262. Qual è il capitale che produce lire 48 d'interesse al 5 per 100 l'anno?

R. — Lire 960.

263. Una persona riscuote annualmente lire 850 per un capitale impiegato al 4, 50 per 100; qual è questo capitale?

R. — Lire 18888, 89 c.

264 Un capitale, impiegato per 23 mesi al 7 per 100, ha prodotto lire 462, 15 c. d'in teresse. — Far conoscere il valore del capitale.

R. — Lire 3444, 60 c.

265. Una somma di lire 1250 ha prodotto lire 56,25 c. d'interesse in un anno; a qual tassa era stata impiegata?

R. — Tassa: lire 4, 50 c.

266. Un capitale di lire 4300 ha prodotto lire 561, 81 c. d'interesse in 2 anni, 3 mesi e 8 giorni; dire a qual tassa fu impiegato.

R. — Tassa: lire 5, 75 c.

267. A qual tassa erano state impiegate lire 510, che, alla fine di 23 giorni, fra interesse e capitale, sono divenute lire 511, 45?

R. — Tassa: lire 4, 48 circa.

268. Un tale chiede qual capitale dovria impiegare al 6 per 100, perchè cogli interessi possa saldare un debito di lire 230, 94 c., pagabile dopo 3 anni.

R. — Capitale: lire 1283.

269. Un coscritto, prima di partire per l'armata, colloca un capitale di lire 7800 al 7 per 100; e al suo ritorno riceve fra capitale ed interesse la somma di lire 14625. — Si domanda quanti anni stette assente.

R. — Anni $1\frac{1}{2}$.

Interesse composto.

401. Dalla definizione data al n.º 388 è facile dedurre la regola seguente:

Per calcolare ciò che diviene un capitale impiegato ad interesse composto dopo un numero di anni, si cerca primieramente l'interesse del capitale per un anno alla tassa determinata (n.º 390), *e si aggiunge questo interesse al capitale; così abbiamo un nuovo capitale.*

Si cerca ancora l'interesse per un anno di questo secondo capitale, il quale si aumenta dell'interesse trovato, e si ottiene in

tal modo un terzo capitale, sul quale si opera come sopra i due primi; e così di seguito, fino a che non siasi esaurito il numero degli anni.

Esempio. — *Si sono impiegate lire* 1200 *ad interesse composto per* 3 *anni, alla tassa del* 5 *per* 100; *qual somma si deve ritirare?* — Avremo: per l' interesse del 1.° anno

$$\frac{1200 \times 5}{100} = \text{L. } 60.$$

Indi per l' nteresse del 2° anno:

$$\frac{(1200 + 60) \times 5}{100} = \frac{1260 \times 5}{100} = \text{L. } 63.$$

Finalmente, per l'interesse del 3° anno:

$$\frac{(1260 + 63) \times 5}{100} = \frac{1323 \times 5}{100} = \text{L. } 66,15 \text{ c.}$$

Ora 1323 + 66, 15 c. = Lire 1389, 15 c. per la somma da ritirarsi.

402. Se la somma fosse impiegata per anni e frazione d'anno, resterebbe a calcolarsi con una regola d' interesse semplice ciò che rende l' ultimo capitale trovato, durante questa frazione di anno.

403. Questo metodo di calcolare gl' interessi composti si rende incomodo, e quasi impraticabile, quando il numero degli anni è molto grande; in questo caso è necessario fare uso dei *logaritmi,* come vedremo in seguito.

PROBLEMI

sulla regola d'Interesse composto.

270 Si sono impiegate Lire 2000 al 5 per 100 ad interesse composto per 4 anni; qual somma devesi ritirare?

R. — Lire 2431, 01 c.

271. Lire 2600, poste ad interesse composto, alla tassa del 5 per 100, che diventeranno dopo 4 anni?

R. — Lire 3160, 32 c.

272. Si domanda l' interrsse composto del capitale di lire 12000 al 5 per 100 in 4 anni.

R. — Lire 2586, 07 c.

273. Un capitale di lire 870 è restato impiegato per 5 anni, 3 mesi e 20 giorni ad interessi composti, alla tassa del 4 per 100. — Quale interesse ha prodotto?

R. — Lire 201, 41 c.

REGOLA DI SCONTO.

404. Quando una *cambiale*, od un *biglietto*, è pagato avanti la sua *scadenza*, quegli che paga fa sul valore del biglietto un guadagno, che si chiama *sconto*. La regola di sconto ha per oggetto di cercare il valore di questo guadagno, calcolato ad un tanto per cento.

Vi ha due specie di sconto: lo sconto *all'infuori*, o *commerciale*, e lo sconto *all' indentro*, o *razionale*.

Sconto in fuori.

405. Lo sconto *in fuori* non è altro che l'interesse semplice della somma indicata sul biglietto; interesse che si calcola pel tempo che corre fino alla scadenza.

Lo sconto di una somma si trova nella stessa maniera con cui si calcolano i suoi interessi: per conseguenza le formule date per l'interesse semplice (n.° 400), servono ancora per lo sconto in fuori. — Ecco alcuni esempi.

406. Problema 1.° — *Un banchiere sconta al* 5 *per* 100 *un biglietto di lire* 1560, *pagabile fra* 15 *mesi; si domanda quanto dovrà sborsare.*

Soluzione.

Il banchiere dovrà sborsare lire 1560 meno gl'interessi di questa somma al 5 per 100 durante 15 mesi; perciò facendo uso della prima formula, e chiamando s lo sconto, si avrà:

$$c = 1560; \; r = 5; \; t = \frac{15}{12} \text{ o } \frac{5}{4};$$

$$\text{e quindi: } s = \frac{1560 \times 5 \times 5}{100 \times 4} = \text{L. } 97, 50 \text{ c.}$$

Ora da L. 1560 togliendo L. 97, 50, restano L. 1462, 50 c. per la somma che dovrà sborsare il banchiere.

407. Problema 2.° — *Qual'è la somma che, scontata per un anno al* 5 *per* 100 *in fuori, si trova ridotta a lire* 960, 40?

Soluzione.

Per risolvere questo problema stabiliremo una proporzione dicendo: *se lire* 100 *scontate diventano* 95: *qual'è la somma che scontata si riduce a* 960, 40?

Quindi: $100 : 95 :: x : 960,40;$

da cui $x = \dfrac{960,40 \times 100}{95} =$ L. 1010, 94 circa.

408. Problema 3.° — *A qual tassa è stata scontata la somma di lire* 1000, *ridotta a lire* 965, *lo sconto essendo preso in fuori per un anno?*

Soluzione.

Facendo uso della quarta formula (n.° 400).

Si ha: $i = 1000 - 965 = 35$; $c = 1000$; $t = 1$.

Quindi: $r = \dfrac{35 \times 100}{1000 \times 1} =$ L. 3, 50 c. per la tassa cercata.

Questo problema potrebbe risolversi anche ragionando così: *se lire* 35 (differenza che passa fra 1000 e 965) *è lo sconto di lire* 1000; *quale sarà lo sconto di lire* 100?

E si avrebbe la proporzione:

$$35 : 1000 :: x : 100;$$

da cui: $x = \dfrac{35 \times 100}{1000} =$ L. 3, 50 c.

409. Problema 4.° — *Una somma di lire* 1500 *ha subìto a titolo di sconto una diminuzione di lire* 830; *si domanda a quale epoca scadeva, sapendo che la tassa di sconto era al* 4 *per* 100.

Soluzione.

Risolvendo il problema colla seconda formula (n.° 400), abbiamo: $i = 830$; $c = 1500$; $r = 4$; e quindi:

$t = \dfrac{830 \times 100}{1500 \times 4} =$ Anni 13 e mesi 10.

Sconto in dentro.

410. Lo *Sconto in dentro* è la differenza fra il valore *nominale* del biglietto e il suo valore *attuale*.

Il valore attuale d'un biglietto è la somma che, aumentata dei suoi interessi sino alla scadenza, uguaglia il valore nominale, o la somma indicata sul biglietto. — Questo valore essendo calcolato, si sottrae dal valore nominale del biglietto, ed il resto è lo sconto in dentro.

411. Per trovare la formula onde calcolare lo sconto in dentro, risolveremo il seguente

Problema. — *Scade una cambiale di lire* 700 *fra* 7 *mesi: pagandola oggi, ci viene accordato lo sconto in dentro del* 5 *per* 100. — *Quanto si sborserà?*

Soluzione.

Secondo la definizione, la somma da sborsarsi deve esser tale che, unita al suo interesse di 7 mesi, uguagli lire 700. Ora, essendo la tassa al 5 per 100 all' anno, è chiaro che lire 100 in 7 mesi diverrebbero

$$100 + \frac{100 \times 5 \times 7}{100 \times 12} = 100 + \frac{5 \times 7}{12}.$$

Ciò posto, stabiliremo una proporzione dicendo: *se lire* 100 *in* 7 *mesi diventano* $100 + \frac{5 \times 7}{12}$, *qual è il capitale che nello stesso tempo diviene lire* 700? — E si ha

$$100 : 100 + \frac{5+7}{12} :: x : 700;$$

da cui: $x = \frac{700 \times 100}{100 + \frac{5 \times 7}{12}} = \frac{70000}{100 + \frac{35}{12}} = \frac{70000}{\left(\frac{1235}{12}\right)}$

$= \frac{70000 \times 12}{1235} =$ L. 680, 16 circa per la somma da pagarsi.

Infatti, questa somma, impiegata al 5 per 100 per 7 mesi, uguaglia precisamente L. 700, come si può verificare.

412. Se fosse domandato soltanto lo sconto, basterebbe allora togliere dalla somma indicata sulla cambiale, cioè da lire

700, il resultato ottenuto lire 680, 16; e si avrebbe:

$$L.\ 700 - 680,16 = 19,84\ c.$$

413. Dunque, *per trovare la somma scontata in dentro, basta moltiplicare la somma data per* 100, *e dividere il prodotto per* 100 *aumentato della tassa moltiplicata pel tempo;* per conseguenza, indicando con s la somma scontata, con c la somma data, con r la tassa di sconto, e con t il tempo che corre sino alla scadenza, si avrà la formula:

$$s = \frac{c \times 100}{100 + (r \times t)}.$$

Applicazione:

Calcolare lo sconto in dentro di un biglietto di lire 6378, *pagabile in* 6 *mesi e* 21 *giorni, la tassa essendo del* 4 *per* 100 *l'anno.*

Si ha subito: $c = 6378$; $r = 4$; $t = \frac{201}{360}$ o $\frac{67}{120}$ d'anno; e quindi:

$$s = \frac{6378 \times 100}{100 + \left(4 \times \frac{67}{120}\right)} = \frac{637800}{100 + \frac{67}{30}}$$

$$= \frac{637800 \times 30}{3067} = L.\ 6238,67 \text{ circa.}$$

Il valore attuale del biglietto essendo L. 6238, 67 c., lo sconto in dentro sarà:

$$6378 - 6238,67 = L.\ 139,33\ c.$$

414. Le due operazioni precedenti costituiscono la vera maniera di scontare una somma. Nondimeno i negozianti non si attengono a questa regola; essi scontano ordinariamente a tanto per 100 all' anno, o al mese, e stabiliscono una regola affatto simile a quella d' interesse (n.° 405); cioè levano dalla somma totale il suo interesse, invece di levare solamente l' interesse della somma già scontata; talchè la regola di sconto in fuori non è giusta.

Infatti, risolvendo il problema precedente con questo metodo, si ha (n.° 406):

$$s = \frac{6378 \times 4 \times \frac{67}{120}}{100} = \frac{6378 \times 4 \times 67}{100 \times 120} = L.\ 142,44\ c.$$

Lo sconto in dentro, trovato sopra, è L. 139, 33 circa, e lo sconto in fuori è L. 142, 44 c.; vi è dunque una differenza di L. 3, 11, che è appunto l'interesse di L. 139, 33 c., durante i 201 giorni; il che dimostra che collo sconto in fuori si ritengono anche gl' interessi degli interessi.

PROBLEMI

sulla regola di sconto in dentro e in fuori.

274. Qual è lo sconto in fuori, al 4 per 100, di lire 680, pagabili in un anno?

R. — Lire 27, 20 c.

275. Qual è lo sconto in fuori al 7 per 100, d' una somma di lire 1245, pagabili in 9 mesi?

R. — Lire 65, 36 c.

276. Si vuol riscuotere subito una cambiale di lire 718, pagabile fra 18 mesi; quanto si dovrà riscuotere, calcolando lo sconto in fuori al 6 per 100?

R. — Lire 653, 38 c.

277. Si domanda il valore attuale di una somma di lire 787, pagabile in 15 mesi, scontata in fuori al 5 per 100.

R. — Lire 737, 82 c. circa.

278. Qual'è la somma che, scontata per 3 mesi al 6, 50 per 100 in dentro, si trova ridotta a lire 914, 25 c?

R. — Lire 929, 10 c. circa.

279. Che somma si deve riscuotere per un biglietto di lire 1200, pagabile in 7 mesi e 20 giorni, che si fa scontare in fuori alla tassa del 6, 50 per 100?

R. — Lire 1150, 18 c. circa.

280. Un commerciante deve pagare una somma di lire 728 fra 5 mesi e 10 giorni: ma volendo egli pagarla 2 mesi avanti la scadenza, gli viene scontata al 4 per 100. — Qual sarà lo sconto in fuori?

R. — Lire 4, 85 c. circa.

281. Si domanda lo sconto in fuori di lire 457, per 25 giorni, al 6 per 100.

R. — Lire 1, 90 c. circa.

282. Qual è lo sconto in dentro di lire 945, al 5, 50 per 100, in un anno?

R. — Lire 49, 27 c. circa.

283. Una persona che possiede un biglietto di lire 720, pagabile in un anno, si presenta al banchiere per riceverne il valore attuale. — Qual somma riceverà, essendo lo sconto in dentro al 3, 50 per 100?

R. — Lire 695, 65 c. circa.

284. A qual tassa è stato portato lo sconto di una somma di lire 1084, ridotta a lire 1000; lo sconto essendo preso in fuori per un anno?

R. — Tassa, lire 7, 75 c. circa.

285. Una somma di lire 1700 ha subito uno sconto di lire 940; si domanda a qual' epoca scadeva, sapendo che lo sconto fu preso in fuori al 5 per 100.

R. — Scadeva fra 11 anni e giorni 21 c.

PROBLEMI

sullo sconto delle fatture, sui diritti di commissione, sul cambio dei biglietti, sui premi d'assicurazione ec. (1).

286. Una fattura consta di lire 1240, e si accorda il 7 per 100 di sconto al contante; a qual somma si riduce la fattura?

R. — Lire 1153, 20.

287. Un mercante fa un ribasso del $4\frac{1}{2}$ per 100 sul prezzo della sua mercanzia, il cui valore è di lire 835, 45 c. — Si domanda qual somma sborserà il compratore.

R. — Lire 797, 85 c.

288. Un ministro di negozio ha l'$1\frac{1}{2}$ per 100 sul valore della vendita che fa. — Qual somma avrà su lire 2480 di vendita?

R. — Lire 37, 20 c.

289. Uno stabile, stimato lire 22450, è assicurato a ragione di lire 1, 70 c. per ogni 1000 lire. — Qual somma è dovuta per questo alla compagnia d'assicurazione?

R. — Lire 38, 165 c.

290. Una casa, stimata lire 8500, si fa assicurare al 4, 33 per 100. — Si domanda qual somma si deve pagare?

R. — Lire 368, 05 c.

291. Un venditore trascura il 9 per 100 sul peso della sua mercanzia, avuto riguardo al peso delle balle che la contengono. — Si dica quanto ha rilasciato sopra una balla di 89 chilogrammi di questa mercanzia.

R. — 8 chilogrammi, 01 decagrammo.

(1) In tutti questi problemi non si tien conto del tempo. Basta prelevare il *tanto per cento* o *per mille*.

292. Il prezzo *netto* d'una mercanzia è di lire 4, 85 c. il chilogrammo, ed è accordato il 3 $\frac{1}{2}$ per 100 di *tara* (1) — Si domanda quanto si deve pagare per una cassa di questa mercanzia, pesante *al lordo* 164 chilogrammi.

R. — Lire 767, 56 c. circa.

293. Una mercanzia costa lire 36, 16 c. ogni 100 chilogrammi al netto. — Si calcoli il prezzo di 8664 chilogrammi della stessa mercanzia, tolta la tara del 4 per 100.

R. — Lire 3007, 59 c. circa.

294. La liquidazione d'un fallimento presenta ai creditori il 35 per 100 di perdita. — Si domanda qual perdita proverà il creditore, al quale erano dovute lire 3420.

R. — Perdita: lire 1197.

295. Supponendo nel problema precedente che la perdita sia del 70 per 100, a quanto si dovrà ridurre un credito di lire 1369?

R. — Lire 410, 70 c.

296. Ho venduto per lire 2325 di mercanzia, colla *senseria* del 5 per 100; quanto dovrò dare al mezzano?

R. — Lire 116, 25 c.

297. Tn tale volendo portarsi da Marsilia a Lione, si presenta ad un banchiere perchè gli faccia avere in quest'ultimo luogo lire 2800 nette. — Si domanda quanto dovrà dare al banchiere pel cambio di questa somma, essendo il cambio al 3 per 100.

R. — Lire 84.

Nozioni sopra i Fondi pubblici.

415. Quando i governi non possono supplire alle spese richieste dallo stato col solo impiego delle entrate ordinarie, sono obbligati a ricorrere al prestito. — A tale oggetto stabiliscono la somma di cui hanno bisogno ed il tanto per cento che inten-

(1) Si chiama *tara* un numero di chilogrammi, che per ogni 100 o 1000 si accorda senza pagamento al compratore di qualche mercanzia. — La *tara* si sottrae dal numero di chilogrammi pagabili al netto. — Così nell'esempio qui sopra, la tara del 3 $\frac{1}{2}$ per 100 sopra i chilogrammi 164, è uguale a $\frac{164 \times 3,5}{100} = 5$ chilogrammi, 74 decagrammi, da sottrarsi dai 164 chilogrammi, i quali saranno perciò ridotti a 158 chilogrammi, 26 decagrammi, che si moltiplicheranno pel prezzo lire 4, 35 ec.

dono di corrispondere sulle somme prese a prestito; poi, per sollecitare i capitalisti, fanno annunziare sui giornali che il governo si obbliga per 100 e corrisponde su questa somma l'interesse già stabilito, quando gli si paghi il 90, l'80, il 70, o meno, per 100. — Il governo rilascia a ciascun offerente una carta da cui risulta il contratto stabilito fra esso e l'offerente ed il modo con cui sono adempiute le condizioni da esso contratte.

La somma di denaro, di cui lo stato è debitore verso il pubblico, costituisce ciò che chiamasi *debito pubblico* o *debito dello stato*; e le carte dalle quali risultano i diritti e gli obblighi del governo e dei prestatori o compratori di rendite diconsi *fondi pubblici*.

416. Il debito pubblico si distingue in *debito consolidato* ed in *debito oscillante* o *fluttuante*. Il primo è costituito dal complesso delle somme di denaro ricavate dai prestiti; il secondo è formato di quei capitali che il governo prende a prestito provvisoriamente onde sopperire a qualche momentanea urgenza di denaro, e che restituisce dopo un tempo determinato. — I titoli emessi per constatare il debito consolidato chiamansi *cartelle di rendita*.

417. Nei fondi pubblici si suole distinguere: 1° *la rendita*; 2° *il saggio* o *la tassa*; 3° *il capitale*; 4° *il corso*.

La rendita è l'interesse o frutto che i governi pagano ai proprietari dei fondi pubblici.

Il saggio o *la tassa* è l'interesse di 100 lire di capitale.

Il capitale è la somma di denaro che costituisce l'ammontare del prestito.

Il corso è il prezzo effettivo di ogni 5, $4\frac{1}{2}$ o 3 lire di rendita.

Il corso della rendita dicesi *alla pari* quando è a Lire 100; è *sopra* o *sotto alla pari* quando le supera o ne è inferiore.

418. Quattro sono i problemi relativi a qualunque classe di rendita, e riguardano:

1.° Il capitale effettivo da sborsarsi per l'acquisto di una data somma di rendita ad un dato corso;

2.° La somma di rendita che si può acquistare ad un dato corso con un capitale effettivo determinato;

3.° L'interesse che si ricava da ogni 100 lire di rendita acquistata ad un dato corso;

4.° Il corso al quale si può acquistare una determinata somma di rendita con un dato capitale effettivo.

Problema 1.° — *Volendo acquistare* L. 1800 *di rendita italiana* 5 *per cento, qual somma si deve sborsare se la rendita è al corso di* 70 ?

SOLUZIONE.

Se per L. 5 di rendita si pagano L. 70, quante ne pagheremo per L. 1800?

Si ha $5 : 1800 :: 70 : x$;

da cui $$x = \frac{1800 \times 70}{5} = 25200 \text{ Lire.}$$

Problema 2.° — *Un tale vuole impiegare* L. 25200 *per l'acquisto di rendita* 5 *per cento; si domanda quanta ne potrà acquistare, se il corso è al* 65 ?

SOLUZIONE.

Se con L. 65 si acquistano L. 5 di rendita, quanta ne avremo con L. 25200?

Si ha $65 : 25200 :: 5 : x$;

da cui $$x = \frac{25200 \times 5}{65} = \text{Lire } 1938,46 \ldots\ldots$$

Problema 3.° — *A qual tassa s'impiega il denaro acquistando rendita* 3 *per cento al corso di* 40, 50.

SOLUZIONE.

Se L. 40, 50 producono una rendita di L. 3; Lire 100 che rendita daranno?

Si ha $40{,}50 : 100 :: 3 : x$;

da cui $$x = \frac{100 \times 3}{40{,}50} = \text{Lire } 7{,}407 \ldots\ldots$$

Problema 4.° — *Un tale acquistò una cartella di* L. 1800 *di rendita con* L. 25200; *si vuol conoscere il corso al quale fu acquistata.*

SOLUZIONE.

Se L. 1800 di rendita costano L. 25200, quanto costeranno L. 5?

si ha $1800 : 5 :: 25200 : x$;

da cui $$x = \frac{25200 \times 5}{1800} = \text{Lire } 70.$$

PROBLEMI.

298. Una cartella di Lire 500 di rendita 3 per cento è stata acquistata al corso di 40, 50; domandasi la somma sborsata dal compratore.

R. — Lire 6750.

299. Un capitalista vuole acquistare Lire 4500 di rendita italiana 5 per cento; qual somma dovrà sborsare, se il corso è al 65?

R. — Lire 58500.

300 Volendo impiegare L. 29300 in tanta rendita italiana 5 per cento, quante lire della medesima si potranno acquistare, se il corso è al 65?

R. — Lire 9156, 25.

301. A qual tassa impiegasi il denaro acquistando rendita italiana 5 per cento al corso di 75?

R. — Lire 6, 66 .....

302. Un tale comprò Lire 2500 di rendita italiana con Lire 19600; si vuol sapere il corso al quale fu acquistata.

R. — Lire 39, 20.

303. Qual è l'interesse per ogni 100 lire d'un capitale investito nella rendita 3 per cento al corso di 40, 75?

R. — Lire 7, 361 ....

304. Un capitalista vuole impiegare L. 5075 acquistando rendita 3 per cento, la quale è al corso di 40, 75; quante lire di rendita potrà acquistare?

R. — Lire 373, 619 ....

305. Si vogliono comprare Lire 114 di rendita al corso di $81\frac{3}{4}$; qual somma si dovrà sborsare?

R. — Lire 1863, 90.

REGOLA DI SOCIETÀ E DI PARTIZIONE.

419. La *regola di società* ha per oggetto di dividere il guadagno o la perdita di una società commerciale fra le persone che vi hanno preso parte, e proporzionalmente ai loro diritti respettivi. — La regola di società è *semplice* o *composta, diretta* o *inversa.*

La regola di società dà dunque luogo a quattro differenti problemi:

1.° *Conoscendo i capitali e il guadagno totale, trovare i guadagni parziali* (società semplice).

2.° *Conoscendo i capitali, i tempi e il guadagno totale, trovare i guadagni parziali* (società composta).

3.° *Conoscendo i guadagni parziali e il capitale totale, trovare i capitali parziali* (società semplice inversa).

4.° *Conoscendo i capitali, i guadagni parziali e il tempo relativo al primo socio, trovare i tempi nei quali furono impiegati i capitali degli altri soci* (società composta inversa).

1.° Società semplice.

420. Quando i tempi sono uguali, si stabilisce una proporzione, dicendo: *la somma dei capitali sta al capitale d' un socio, come il guadagno totale, sta al guadagno incognito di questo socio.*

Esempio 1.° — *Tre negozianti si sono associati; il primo ha posto lire* 1400, *il secondo lire* 3000, *e il terzo lire* 2100. *Hanno fatto un guadagno di lire* 840. — *Qual' è la parte di ciascuno?*

Dietro la regola enunciata, avremo:

$$1400 + 3000 + 2100 = \text{L. } 6500.$$

(somma dei capitali); quindi:

$6500 : 1400 :: 840 : x$; da cui $x =$ L. 180,93 pel 1.°
$6500 : 3000 :: 840 : x'$; . . . $x' =$ » 387,69 pel 2.° circa
$6500 : 2100 :: 840 : x''$; . . . $x'' =$ » 271,38 pel 2.°

Prova — Guadagno totale: L. 840,00.

Dunque, se c, c', c'' . . . . . sono i capitali dei soci, s la loro somma, e g il guadagno totale, avremo le formule generali:

$\dfrac{c \times g}{s}$, che darà il guadagno del primo socio.

$\dfrac{c' \times g}{s}$. . . . . . guadagno del secondo.

$\dfrac{c'' \times g}{s}$ . . . . . . guadagno del terzo ec.

421. Rammentando ciò che fu detto al n.° 376, la regola di società semplice può sciogliersi anche più speditamente come spiegheremo sull' esempio seguente:

Esempio 2.° *Tre negozianti hanno riunito i loro capitali in commercio; il primo ha posto lire* 400, *il secondo lire* 300, *il terzo lire* 500. — *Essi hanno guadagnato lire* 144. — *Quanto tocca a ciascuno?*

Sommando i capitali si ha:

$$L.\ 400 + L.\ 300 + L.\ 500 = 1200 \text{ Lire.}$$

Ora sopra questa somma, paragonata al guadagno ottenuto di L. 144, calcoleremo il guadagno corrispondente ad una lira, mediante la proporzione:

$$1200 : 1 :: 144 : x;$$

da cui $$x = \frac{144}{1200} = L.\ 0,\ 12\ c.$$

Il guadagno dunque corrispondente ad una lira, è L. 0,12 c.

Per conseguenza, avendo il primo negoziante impiegato L. 400, il suo guadagno sarà

$$L.\ 400 \times L.\ 0,\ 12\ c. = L.\ 48;$$

quello del secondo sarà

$$L.\ 300 \times L.\ 0,\ 12\ c. = L.\ 36;$$

e quello del terzo:

$$L.\ 500 \times L.\ 0,\ 12\ c. = L.\ 60.$$

Infatti; L. 48 + L. 36 + L. 60 = L. 144.

Possiamo dunque stabilire la regola seguente: *si sommano tutti i capitali, si divide per la somma ottenuta il guadagno totale, e il quoziente si moltiplica per ciascuno dei capitali; il prodotto che ne risulta sarà il guadagno corrispondente.*

Quindi, se con c, c', c'' . . . . si rappresentano i capitali dei soci, con s la loro somma, e con g il guadagno totale, il guadagno del primo socio sarà . . $\frac{g}{s} \times c$;

quello del secondo . . . , ... $\frac{g}{s} \times c'$;

quello del terzo . . . . , ... $\frac{g}{s} \times c''$, ec.

Applicazione:

Esempio 3.° — *Tre negozianti hanno posto in società: il* 1.° L. 30000; *il* 2.° L. 35000; *il* 3.° L. 40000. *Il guadagno è stato di* L. 20000. — *Si domanda quanto tocca a ciascuno.*

Abbiamo: $c = 30000$; $c' = 35000$; $c'' = 40000$; $s = 105000$; $g = 20000$; quindi il guadagno del I.° sarà

$$\frac{20000}{105000} \times 30000, \text{ o } \frac{20}{105} \times 30000 = \text{L. } 5714,29 \text{ c.}$$

quello del 2.°, $\frac{20}{105} \times 35000 = $ L. 6666, 67 c.

quello del 3.° $\frac{20}{105} \times 40000 = $ L. 7619, 04 c.

Totale: L. 20000, 00

422. Debbono considerarsi come appartenenti alla regola di società semplice certi problemi, nei quali si ha per oggetto di dividere una somma proporzionalmente a numeri conosciuti. Questi problemi si sciolgono secondo la regola precedente, che in questo caso chiamasi *regola di partizione* (Per la teoria vedi n.° **376**).

423. Esempio 1.° — *Dividere lire* 1287 *fra tre persone, di maniera, che la seconda abbia il doppio della prima, e la terza il triplo della seconda.*

SOLUZIONE.

Rappresentando con 1 la parte della prima persona, la parte della seconda sarà 2, e quella della terza 2 × 3, o 6. — Si tratta dunque di partire 1287 proporzionalmente ai numeri 1, 2, 6. Quindi, chiamando x, y, z, i tre numeri cercati, si avrà

$$x = \frac{1287 \times 1}{1+2+6} = \text{L. } 143 \text{ per la prima persona;}$$

$$y = \frac{1287 \times 2}{1+2+6} = \text{L. } 286 \text{ per la seconda;}$$

$$z = \frac{1287 \times 6}{1+2+6} = \text{L. } 858 \text{ per la terza.}$$

Totale: L. 1287

424. Esempio 2.° — *Dividere lire* 472 *fra tre persone proporzionalmeate ai numeri* $\frac{1}{2}$, $\frac{4}{5}$, $\frac{2}{3}$.

SOLUZIONE.

Riducendo le tre frazioni allo stesso denominatore, si avranno le tre frazioni equivalenti $\frac{15}{30}$, $\frac{24}{30}$, $\frac{20}{30}$. Ciò fatto, se si con-

siderano i soli numeratori 15, 24, 20, la questione è ridotta alla precedente, e si avrà:

$$x = \frac{472 \times 15}{15+24+20} = \text{L. } 120, \text{ per la prima persona;}$$

$$y = \frac{472 \times 24}{15+24+20} = \text{L. } 192, \text{ per la seconda;}$$

$$z = \frac{472 \times 20}{15+24+20} = \text{L. } 160, \text{ per la terza.}$$

Totale: L. 472

2.° Società composta.

425. Quando i tempi sono disuguali, il problema si riduce al primo caso, moltiplicando ogni capitale pel tempo durante il quale è restato in società; i prodotti che si ottengono si considerano come i capitali di ciascun socio, impiegati per un tempo uguale.

Esempio. — *Quattro persone si sono riunite in società. — La prima ha posto L.* 3500 *per* 15 *mesi: la seconda L.* 5000 *per* 18 *mesi; la terza L.* 6800 *per* 11 *mesi, e la quarta* L. 4450 *per* 9 *mesi. — Hanno fatto un guadagno totale di L.* 5233, *che si vogliono partire; quanto toccherà a ciascuno?*

Soluzione.

Osserveremo primieramente che L. 3500, impiegate per 15 mesi, equivalgono a L. 3500 × 15 impiegate per 1 mese; che L. 5000 impiegate per 18 mesi, equivalgono a L. 5000 × 18 impiegate per 1 mese; che L. 6800 impiegate per 11 mesi, valgono L. 6800 × 11 impiegate per 1 mese; finalmente L. 4450 impiegate per 9 mesi, equivalgono a L. 4450 × 9 impiegate per 1 mese. — Ciò posto, avremo:

Capitale del 1.°	3500 × 15	=	L.	52500.
» del 2.°	5000 × 18	=	»	90000.
» del 3.°	6800 × 11	=	»	74800.
» del 4.°	4450 × 9	=	»	40050.
Somma dei capitali			L.	257350.

La questione essendo così ridotta a tempi uguali,

avremo:

$$x = \frac{5233 \times 52500}{257350} = \text{L. } 1067,\ 54 \text{ c. pel } 1^{\circ} \text{ socio.}$$

$$x' = \frac{5233 \times 90000}{257350} = \text{L. } 1830,\ 08 \text{ c. pel secondo.}$$

$$x'' = \frac{5233 \times 74800}{257350} = \text{L. } 1521,\ 00 \text{ pel terzo.}$$

$$x''' = \frac{5233 \times 40050}{257350} = \text{L. } 814,\ 38 \text{ pel quarto.}$$

Totale: L. 5233, 00

3.° Società semplice inversa.

426. Abbiamo detto che la regola di società semplice dicesi ***inversa***, quando si cerca il capitale impiegato da ciascun socio, essendo dati la somma dei capitali, il guadagno totale e il guadagno parziale di ognuno di essi.

Esempio 1.° — *Due mercanti impiegarono in società L. 600, e ne ritrassero un guadagno di L. 150. Diviso questo guadagno in proporzione ai respettivi capitali, il primo socio ebbe L. 90, il secondo L. 60. — Domandasi qual fu il capitale impiegato da ciascun socio.*

Soluzione.

427. Cercheremo primieramente il capitale corrispondente ad una lira di guadagno, dicendo: se *L. 150 è il guadagno d' un capitale di L. 600, 1 lira di guadagno da qual capitale proviene?* — e si ha la proporzione:

$$150 : 600 :: 1 : x;$$

da cui
$$x = \frac{600}{150} = \text{L. } 4.$$

Ogni socio dunque sopra ogni 4 lire guadagnò lire 1. Per conseguenza, moltiplicando per 4 il guadagno di ciascuno, si avrà il suo capitale; quindi

L. 90 $\times$ 4 = L. 360, capitale del primo.

L. 60 $\times$ 4 = L. 240, capitale del secondo.

428. Dunque, *data la somma dei capitali, il guadagno totale e il guadagno parziale d' ogni socio, si trova il capitale respettivo, dividendo la somma dei capitali pel guadagno totale, e moltiplicando il quoziente ottenuto pel guadagno parziale di ciascnn socio.* —

Quindi se S rappresenta la somma dai capitali, G il guadagno totale g, g', g''. . . i guadagni parziali di ciascun socio, sarà

$\frac{S}{G} \times g$ . . . . . il capitale del primo socio.

$\frac{S}{G} \times g'$ . . . . . . quello del secondo.

$\frac{S}{G} \times g''$ . . . . . . quello del terzo, etc.

Applicazione della formola:

Esempio 2.° — *Tre soci posero in comune un capitale di L. 18000, le quali produssero un guadagno totale di L. 2400; la parte di guadagno toccata al primo, fu di* L. 400; *quella del secondo, L.* 800, *e quella del terzo, L.* 1200. — *Si domanda qual fosse il capitale posto da ciascun socio.*

Si ha: $S = 18000$; $G = 2400$; $g = 400$; $g' = 800$; $g'' = 1200$. — Quindi:

$\frac{18000}{2400} \times 400 =$ L. 3000, capitale del primo.

$\frac{18000}{2400} \times 800 =$ L. 6000, capitale del secondo.

$\frac{18000}{2400} \times 1200 =$ L. 9000, capitale del terzo.

Totale: L. 18000

4.° Società composta inversa.

429. Esempio 1.° — *Un commerciante impiegò in un negozio* L. 400. *Dopo qualche tempo si associò un altro commerciante che apportò un capitale di* L. 800. *Qualche tempo dopo entrò in società un terzo commerciante con un capitale di* L. 1200. *Dopo due anni, scioltasi la società, fu spartito il guadagno, e al primo commerciante toccarono* L. 100, *al secondo* L. 150 *e al terzo* L. 200 — *Si domanda quanto stette impiegato il capitale del secondo e del terzo commerciante.*

Soluzione.

1.° Se L. 400, impiegate dal primo commerciante, produssero L. 100 di guadagno in 2 anni: L. 800, impiegate dal secondo commerciante in quanto tempo produssero L. 150?

Per rispondere a questa domanda facciamo il prospetto dei dati:

Capitale	Guadagno	Anni
400	100	2
800	150	x.

Ciò fatto, osservando che i capitali sono in rapporto inverso col tempo, e i guadagni in rapporto diretto, si ha (vedi n.° 385):

$$x = \frac{2 \times 400 \times 150}{800 \times 100} = \frac{3}{2} = \text{Anni 1 e mesi 6},$$

che è il tempo durante il quale il secondo commerciante tenne impiegato il suo capitale.

2.° Per trovare quanto tempo stette impiegato il capitale del terzo commerciante, ragionando come sopra, si avrà:

Capitale	Guadagno	Anni
400	100	2
1200	200	x'.

Da cui

$$x' = \frac{2 \times 400 \times 200}{1200 \times 100} = \frac{4}{3} = \text{Anni 1 e mesi 4},$$

con che è risoluto il problema.

430. Chiamando c, c' c'' . . . . . i capitali dei soci g, g' g'' . . . . . i guadagni respettivi, e t, t', t'' . . . . . i tempi durante i quali sono rimasti impiegati, se il capitale c ha prodotto un guadagno g in t anni, il tempo impiegato dal capitale c' a produrre un guadagno g', sarà

$$t' = \frac{t \times c \times g'}{c' \times g};$$

e il tempo impiegato dal capitale c'' a produrre un guadagno g'', sarà

$$t'' = \frac{t \times c \times g''}{c'' \times g}, \text{ ecc.}$$

Per mezzo di queste formule potremo speditamente risolvere tutti i problemi simili al precedente.

Applicazione:

431. Esempio 2.° — *Un negoziante* A *pose in commercio un capitale di Lire* 1200*; scorso alquanto tempo si associò il negoziante* B*, che apportò in società un capitale di L.* 3000*, e più tardi entrò in società anche un altro negoziante* D *con un fondo di L.* 900. — *Sciolsero la società dopo* 4 *anni; e, spartito il guadagno fatto,*

ad A *toccarono L.* 200, *a* B *L.* 450, *e a* D *L.* 120. — *Si domanda quanto tempo i soci* B *e* D *tennero impiegato il loro capitale.*

Si ha: $c = 1200$; $c' = 3000$; $c'' = 900$;
$g = 200$; $g' = 450$; $g'' = 120$, e $t = 4$.
Quindi:

$$t' = \frac{4 \times 1200 \times 450}{3000 \times 200} = \text{Anni } 3, \text{ Mesi } 7, \text{ Giorni } 6.$$

$$t'' = \frac{4 \times 1200 \times 120}{900 \times 200} = \text{Anni } 3, \text{ Mesi } 2, \text{ Giorni } 12.$$

432. Per verificare l'operazione, basterebbe tradurre il problema in un altro, cercando, per esempio, il guadagno invece del tempo ec.

PROBLEMI

sulla regola di società.

306. Due persone hannu fatto società; la prima ha posto lire 9500, e la seconda lire 12800, Alla fine d'un anno trovano un guadagno di lire 2420. — Si domanda quanto tocca a ciascuna in proporzione del proprio capitale.

R. — Alla prima lire 1030, 94 c. — Alla seconda lire 1389, 06.

307. Tre soci hanno fatto un guadagno di lire 2300. Il primo aveva posto nella impresa lire 5400 per 3 mesi; il secondo lire 7900 per 7 mesi; il terzo lire 8500 per 9 mesi. — Si domanda quanto tocca a ciascuno del guadagno fatto.

R. — Al primo lire 251, 75 c. — Al secondo lire 859, 40. — Al terzo lire 1188, 85 circa.

308. Tre individui diventano eredi, l'uno di lire 5800, l'altro di lire 1000, il terzo di lire 12600 a condizione di pagare lire 4000 di debiti. — Per qual somma deve ciascuno di essi contribuire?

R. — Il primo per lire 1195, 88 c. — Il secondo per lire 206, 18 c. — Il terzo per lire 2597, 94 circa.

309. Un tale, sodisfatto di un lavoro, vuol dare una gratificazione di lire 12 ai due operai che l'hanno eseguito. — Ma l'uno vi ha lavorato 5 giorni e l'altro 3 giorni solamente. — Quanto toccherà a ciascuno in proporzione del tempo che vi ha lavorato?

R. — Al primo lire 7, 50 c. — Al secondo lire 4, 50 c.

310. Si domanda di dividere lire 150 in due parti tali, che la prima stia alla seconda, come 2 sta a 5.

R. — Prima parte: lire 42, 85 c. — Seconda: lire 107, 15 circa.

311. Dividere lire 409 in tre parti, che stieno fra loro come i numeri 3, 7, 11.

R. — Prima parte: lire 58, 43 c. — Seconda: lire 136, 33 c. — Terza: lire 214, 24 circa.

312. Tre persone, A, B, C, hanno fatto società: A ha posto Lire 300 per 2 mesi, B, Lire 500 per 3 mesi, e C, Lire 700 per 5 mesi. Hanno fatto un guadagno totale di Lire 1400. — Trovare la parte che spetta a ciascun associato.

R. — Ad A, Lire 150; a B, Lire 375; a C, L. 875.

313. Due barcaiuoli devono dividersi fra loro lire 312, che hanno guadagnato nel trasporto d'una mercanzia. Il primo ha condotto 12500 chilogrammi a 49 chilometri, e il secondo 8000 chilogrammi a 63 chilometri. — Quanto tocca a ciascuno?

R. — Al primo lire 171, 15 c. — Al secondo lire 140, 85 circa.

314. Si vogliono dividere lire 1600 fra tre persone di maniera, che la seconda abbia il triplo della prima, e la terza il quadruplo della seconda. — Qual sarà la parte di ciascuna?

R. — Della prima lire 100. — Della seconda lire 300. — Della terza lire 1200.

315. Dividere lire 472 fra tre persone, proporzionalmente ai numeri $\frac{1}{2}$, $\frac{4}{5}$, $\frac{2}{3}$.

R. — Alla prima lire 120. — Alla seconda lire 192. — Alla terza lire 160.

316. Due città debbono fornire un contingente di 94 uomini in ragione della popolazione, che è di 16014 anime per la prima, e 13502 per la seconda. — Determinare la parte di ciascuna città nel contingente.

R. — La prima fornirà uomini 51. — La seconda 43.

317. Tre mercanti impiegarono in società lire 1872 e ne ritrassero un guadagno di lire 960. — Fu diviso questo guadagno, e il primo ebbe di sua parte lire 320, il secondo lire 264, e il terzo lire 376. — Domandasi qual fu il capitale impiegato da ciascuno.

R. — Capitale del primo: lire 624. — Del secondo: lire 514, 80 c. — Del terzo: lire 733, 20 c.

318. Tre soci posero in commercio lire 45200; il guadagno che ne ritrassero fu di lire 10000. Si sa di più che al primo toccarono lire 2787, 61 c.; al secondo lire 3185, 84 c.; al terzo lire 4028, 54 c. — Domandasi qual fosse il capitale di ciascuno socio.

R. — Capitale del primo: lire 12600. — Del secondo: lire 14400. — Del terzo: lire 18200.

319. Un negoziante impiegò in commercio lire 500 Qualche tempo dopo si associò un altro negoziante con un capitale di lire 900, e più tardi entrò pure in società un terzo negoziante con lire 1090. Dopo 3 anni sciolta la società, fu spartito il guadagno; al primo toccarono lire 200; al secondo lire 250, e al terzo lire 300. — Domandasi quanto tempo restò in società il capitale del secondo e del terzo negoziante.

R. — Il capitale del secondo rimasse impiegato anni 2 e mesi 1. Quello del terzo anni 2 e giorni 23 circa.

2.° Caso.

437. Problema 1.° — *In quale proporzione devesi mescolare del vino da lire* 0, 85 *c. il litro, con vino da lire* 0, 50 *c., affinchè il miscuglio costi lire* 0, 60 *c. il litro?*

Soluzione.

Vendendo il litro del miscuglio a L. 0, 60 c.,

1 litro da L. 0, 85 c. produce L. 0, 85 c. — L. 0, 60 = L. 0, 25 c. di *scapito;*

1 litro da L. 0, 50 c. produce L. 0, 60 — L. 0, 50 = L. 0, 10 c. di *guadagno.*

Ora, affinchè il guadagno uguagli lo scapito, basta prendere 10 litri di vino da L. 0, 85 c. e 25 litri da L. 0, 50; infatti in questo caso lo scapito sarà di 25 × 10 centesimi e il guadagno di 10 × 25 centesimi.

Così, mescolando i vini nella proporzione di 10 litri della prima qualità e di 25 litri della seconda, e vendendo il litro della mescolanza L. 0, 60, il guadagno compenserà lo scapito.

438. In generale dunque, *per trovare in quale proporzione si devono mescolare due specie di sostanze, perchè il miscuglio abbia un valore medio dato, si prende la differenza fra il prezzo medio e il prezzo particolare di ciascuna delle due specie di sostanze mescolate, e il rapporto inverso delle due differenze trovate esprime la proporzione domandata.*

439. Problema 2.° — *In quale proporzione bisogna mescolare del vino da lire* 0, 80 *c. il litro, con vino da lire* 0, 50, *per ottenere* 100 *litri di vino da lire* 0, 62 c.?

Soluzione.

La differenza fra L. 0, 80 c. e L. 0, 62 c. è L. 0, 18; la differenza fra L. 0, 62 c. e L. 0, 50 c. è L. 0, 12; dunque i vini devono mescolarsi nella proporzione di 12 a 18, vale a dire che, per non avere nè scapito nè guadagno, si dovrebbero prendere 12 litri di vino da L. 0, 80 c 18 litri da L. 0, 50. Ma poichè il miscuglio deve comporsi di 100 litri, è chiaro che bisogna dividere il numero 100 proporzionalmente ai numeri 12 e 18; perciò chiamando x e y le quantità cercate, si ha (vedi n.° 376):

$$x = \frac{100 \times 12}{12 + 18} = \frac{1200}{30} = \text{Litri } 40;$$

$$y = \frac{100 \times 18}{12 + 18} = \frac{1800}{30} = \text{Litri } 60;$$

il che significa che si dovranno prendere 40 litri di vino da L. 0, 80 c., e 60 litri di quello da L. 0, 50 c.

Infatti, se sopra 1 litro da L. 0,80 rivenduto L. 0, 62, si scapita L. 0, 18:, sopra 40 litri si scapita L. 0, 18 × 40 = L. 7, 20.

Se sopra 1 litro da L. 0, 50, rivenduto L. 0, 62, si guadagna Lire 0, 12, sopra 60 litri si guadagna Lire 0, 12 × 60 = L. 7, 20,; talchè il guadagno compensa lo scapito.

Regola D'Alligazione.

1.° Caso.

440. Problema. — *Si hanno tre verghe d'argento: la prima* al titolo (1) *di* 0,900, *pesante* 0 *chilogrammi*, 234 *grammi; la seconda* al titolo *di* 0,750, *pesante* 0 *chilogrammi*, 145 *grammi, e la terza* al titolo *di* 0,800, *pesante* 0 *chilogrammi*, 321 *grammi. Si fondono insieme e si domanda il titolo della lega.*

Soluzione.

La 1.ª verga contiene . . . . 0 chil. 234 × 0,900 = 0 chil., 21060 d'arg.
La 2.ª verga contiene . . . . 0 chil. 145 × 0,750 = 0 chil., 10875 . . . .
La 3.ª verga contiene . . . . 0 chil. 321 × 0,800 = 0 chil., 25680 . . . .

Così la lega pesa 0 chil. 700, e contiene 0 chil., 57615 d'arg.; per conseguenza, 1, chilogrammo di lega contiene

$$\frac{0 \text{ chilogr., } 57615}{0,700} = 0 \text{ chilogrammi, } 82307 \text{ d'argento.}$$

(1) Il *titolo* d'una lega racchiudente un metallo prezioso è il rapporto del peso di questo metallo al peso totale della lega. Così dicesi che una lega d'argento è *al titolo* di 0,900 quando racchiude 0,900 del suo peso d'argento. Si dice anche che è a 0,900 di *fino*.

Il titolo della lega è dunque di 0,823 *a meno* d'un millesimo.

2.° Caso.

441. Problema. — *In qual proporzione devesi fondere dell' oro al titolo di 0, 900 con oro al titolo di 0, 750, per ottenere dell'oro al titolo di 0, 820?*

Soluzione.

La lega richiesta essendo al titolo di 0, 820,
1 chilogrammo d'oro al titolo di 0, 900 dà
0,900 — 0,820 = 0,080 d'oro di *più*.
1 chilogrammo d'oro al titolo di 0,750 dà
0,820 — 0,750 = 0,070 d'oro di *meno*.

Vi sarà dunque compenso, se si prende 0 chilogrammi, 070 del primo e 0 chilogrammi, 080 del secondo; perchè

0 chilogr., 070 × 0,080 = 0 chilogr., 080 × 0,070.

Così si dovranno fondere le due verghe nel rapporto di 0,070 del primo e 0,080, del secondo, o più semplicemente, nel rapporto di 7 a 8.

PROBLEMI

sulla regola di miscuglio e d' alligazione.

320. Un mercante ha mescolato insieme vini diverse qualità, cioè: 140 litri, da lire 0, 35 c. il litro, e 85 litri da lire 0, 40 c. — Qual sarà il prezzo d'un litro di vino così mescolato?

R. — L. 0, 37 c.

321. Si versano 5 fiaschi d'acqua in 23 fiaschi di vino da lire 0, 75 c. il fiasco; quanto costerà un fiasco di questo miscuglio?

R. — L. 0, 62 c,

322. Un oste ha vino da lire 2, 23 c. il fiasco, da lire 1, 14 c., e da lire 7, 56 c.; mescola 23 fiaschi del primo con 64 del secondo e 80 del terzo; quanto costerà un fiasco di vino così mescolato?

R. — L. 4, 37 c.

323. Si ha della farina di prima qualità, che si vende 60 centesimi il chilogrammo, e della farina di terza qualità, che si vende 28 centesimi. — Si me-

scolano 102 chilogrammi della prima con 50 chilogrammi della terza, e si forn così una seconda qualità — Si dica quanto costerà il chilogrammo questa secon qualità.

R. — L. 0, 49 c.

324. Sono stati fusi 13 chilogrammi di rame con 2 chilogrammi, 7 ettogramm di stagno. Il chilogrammo del rame vale lire 2, 50 c., e quello dello stagno lir 5, 10 c. — Si domanda il prezzo d' un chilogrammo di questa lega.

R. — L. 2, 94 c.

325 I caratteri da stampa si fanno fondendo insieme 5 parti di rame, 20 part d'antimonio e 80 parti di piombo. — Si domanda il valore d'un chilogramme di questa lega, supponendo il rame a lire 2, 50 c., l'antimonio a lire 1, 50 c e il piombo a lire 0, 55 c. il chilogrammo.

R. — L. 0, 82 c.

326. Si hanno due qualità di vino; una vendesi a lire 0, 80 c. il litro, l'altr a lire 0, 50 c. — Si domanda quanti litri dell' una e dell' altra si debbano prendere per formare un miscuglio di 75 litri, a lire, a 0, 60 c. il litro.

R. — Litri 25 della prima qualità, e litri 50 della seconda.

327. Uno speziale vuol fare una cassa di caffè di 115 chilogrammi, mescolando due specie di caffè, l' una da lire 3, 60 c. il chilogrammo, l' altra da lire 1,30 di maniera, che il chilogrammo del miscuglio costi lire 2 — Quale quantità dovrà prenderne di ciascuna specie ?

R. — Chilogrammi 35 della prima qualità, e chilogrammi 80 della seconda.

328. Si fondono insieme tre verghe d' argento, una al titolo di 0, 95, pesante 6 chilogrammi; l' altra al titolo di 0, 875, pesante 8 chilogrammi; e la terza al titolo di 0, 9, pesante 11 chilogrammi. — Si domanda a qual titolo risulterà la lega.

R. — Titolo: 0, 904.

329. In quale proporzione si deve fondere oro al titolo di 0, 92 e di 0, 75 per avere oro al titolo di 0,84 ?

R. — Nella proporzione di 9 a 8.

330. Avendo oro al titolo di 0, 92 e oro al titolo di 0, 75, quanto dovrà prendersene per ottenere 100 grammi di oro al titolo di 0, 84 ?

R. — 52 grammi, 94 della prima qualità, e 74 grammi, 06 della seconda.

Regola congiunta o di cambio.

442. La *regola congiunta* ha per oggetto di trovare il rapporto di due quantità, le quali non sono paragonate immediatamente fra loro, ma hanno relazioni conosciute con altre quantità intermedie; di modo che il rapporto cercato risulta dalla composi-

zione di più rapporti dati. — Essa applicasi principalmente al cambio delle monete, e in questo caso si chiama *regola di cambio.*

443. Problema 1.° — *Sapendo che* 48 franchi *equivalgono a* 52 scellini *d' Inghilterra,* 15 *scellini a* 6 fiorini *d' Allemagna;* 50 *fiorini a* 7 ducati *d' Amburgo;* 14 *ducati a* 40 rubli *di Russia; si domanda a quanti* rubli *di Russia equivalgono* franchi 2500.

SOLUZIONE.

Si ha:

48 fr.	=	52	scel.
15 scel.	=	6	fior.
50 fior.	=	7	duc.
14 duc.	=	40	rub.
x rub.	=	2500	fr.

Moltiplicando queste uguaglianze membro a membro, si ottiene:

$$48 \times 15 \times 50 \times 14 \times x = 52 \times 6 \times 7 \times 40 \times 2500;$$

da cui
$$x = \frac{52 \times 6 \times 7 \times 40 \times 2500}{48 \times 15 \times 50 \times 14},$$

ovvero, sopprimendo i fattori comuni ai due termini:

$$x = \frac{1300}{3} = 433 + \frac{1}{3}.$$

Dunque franchi 2500 equivalgono a rubli $433 + \frac{1}{3}$.

444. Problema 2.° — *Un negoziante francese vuol far passare a Londra una somma* di 1200 lire sterline. *Egli prega un banchiere di Parigi d' incaricarsi di questa commissione, pagando l'* 1 *per* 100 *sulla somma totale. Si domanda, in* franchi, *la somma che egli deve al banchiere.*

D' altronde si sa che

26 *lire sterline* valgono 150 *rubli;*
75 rubli. . . . . . 30 *ducati d' Amburgo;*
20 ducati . . . . . 42 *piastre di Spagna;*
12 piastre . . . . . 63 *franchi.*

SOLUZIONE.

Chiamando x il valore di 1200 lire sterline in franchi,

avremo le uguagliamze:

$$\begin{aligned} 26 \text{ lire} &= 150 \text{ rub.} \\ 75 \text{ rub.} &= 30 \text{ duc.} \\ 20 \text{ duc.} &= 42 \text{ piast.} \\ 12 \text{ piast.} &= 63 \text{ fr.} \\ x \text{ fr.} &= 1200 \text{ lir.} \end{aligned}$$

Moltiplicandole termine a termine, ed effettuando i calcoli co me nell'esempio precedente, troveremo:

$$x = 31500.$$

Dunque 1200 lire sterline si pagano con 31500 franchi per conseguenza il negoziante dovrà sborsare al banchiere franchi 31500, più l' 1 per 100 di questa somma, cioè

$$\frac{31500}{100} = 315;$$

e quindi $\text{fr. } 31500 + 315 = \text{fr. } 31815.$

Questi due esempi fanno chiaramente conoscere la regola da tenersi in tutti i casi analoghi.

PROBLEMI

Snlla regola congiunta o di cambio.

331. Si sa che 20 lire toscane eqnivalgouo a franchi 16, 80 c.; che 63 franchi equivalgono a 50 scellini inglesi; 130 scellini inglesi a 63 fiorini austrici, e 27 fiorini a 260 reali di Spagna. — Si domanda 45 reali a quante lire toscane corrispondono.

R. — Lire toscane 14, 9, 3 circa.

332. Si domanda il rublo d'argento di Russia che parte è del Ducato napoletano, sapendo che 86 Ducati equivalgono a 425 Lire austriache; 42 Lire austriache a 43 Lire toscane; 134 Lire toscane a 21 Scudi romani, e 50 Scudi romani a 67 Rubli di Russia.

R. — Ducati 0,9412. o grana $94 + \frac{12}{100}$ circa.

333. Sapendo che 9 verghe valgouo 7 aune di Francia, e che l'auna vale metri 1, 1884; qual è il rapporto del metro alla verga d' Inghilterra?

R. — Il rapporto è : : 1 : 1, (8188 circa.

334. Quanti scudi romani varranno 5 Luigi di Francia, sapendo che 8 Luigi d'oro di Francia valgono Lire piemontesi 188, 40, che Lire piemontesi 79, 5 valgono 15 scudi romani?

R. — Scudi romani 22, 217.

TEORIA DELLE PROGRESSIONI (1).

Progressioni aritmetiche.

445. Una *progressione aritmetica*, o *per differenza*, è una serie di numeri tali, che la differenza fra ciascuno di essi e il precedente è costante. Questa differenza si chiama *ragione* della progressione.

La progressione è detta *crescente*, quando i termini vanno aumentando; è chiamata *decrescente* quando i termini vanno diminuendo.

Esempio: — I numeri 1, 3, 5, 7, 9, 11 .... formano una progressione per differenza, la cui ragione è 2; e scriversi:

$$\div\ 1\ .\ 3\ .\ 5\ .\ 7\ .\ 9\ .\ 11\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .$$

e si legge 1 *sta a* 3 *sta a* 5 *sta a* 7 ec.

Se gli stessi numeri si scrivono in senso inverso, si avrà la progressione decrescente:

$$\div\ 11\ .\ 9\ .\ 7\ .\ 5\ .\ 3\ .\ 1.$$

Teoremi fondamentali.

446. Teorema 1.° — *Un termine qualunque di una progressione per differenza crescente è uguale al primo, più tante volte la ragione, quanti sono i termini che lo precedono; ed è uguale all'ultimo, meno tante volte la ragione, quanti sono i termini che lo seguono.*

1.° Infatti, sia la progressione

$$\div\ a\ .\ b\ .\ c\ .\ d.\ e\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ l.$$

sia r la ragione.

Per definizione il secondo termine è uguale al primo più la ragione, il terzo termine è uguale al secondo più la ragione, il quarto termine è uguale al terzo più la ragione ec.; onde sarà:

$$b = a + r;\ c = b + r;\ d = c + r;\ e = d + r \text{ ec.}$$

(1) Questa teoria e quella dei *Logaritmi* appartengono essenzialmente all'Algebra; noi perciò ci limiteremo a studiarne soltanto i teoremi fondamentali.

Sostituendo nella seconda uguaglianza a b il suo valore $(a + r)$, si ha

$$c = a + r + r = a + 2r.$$

Sostituendo questo valore di c nella terza uguaglianza, essa diviene:

$$d = a + 2r + r = a + 3r.$$

Finalmente, sostituendo a d questo valore nella quarta uguaglianza, si ottiene:

$$e = a + 3r + r = a + 4r.$$

Se dunque rappresentiamo con l l'*ennesimo* termine, cioè che ha $n - 1$ termini avanti a sè, si avrà la formula:

$$(1) \ldots\ldots l = a + (n - 1) \times r.$$

2.º Per definizione si ha pure:

$$d = e - r;\ c = d - r;\ b = c - r;\ a = b - r.$$

Sostituendo come sopra, si troverà:

$$c = e - r - r = e - 2r;$$
$$b = e - 2r - r = e - 3r;$$
$$a = e - 3r - r = e - 4r.$$

In generale dunque, se con e si rappresenta l'ultimo termine, e con l il termine che occupa l'*ennesimo* posto, cioè che ha $n - 1$ termini dopo di sè, si avrà la formula:

$$(2) \ldots\ldots l = e - (n - 1) \times r.$$

447. Corollario 1.º — In virtù del teorema precedente potrà trovarsi un termine di posto qualunque, senza passare pei termini intermedii.

Vogliasi, per esempio, il termine 83*mo* della progressione ⁚ 1 . 4 . 7 . . . . la cui ragione è 3. Sostituendo nella formula (1) a ciascuna lettera il suo valore, si ha:

$$a = 1;\ n = 83;$$

quindi $l = 1 + (82 \times 3) = 1 + 246 = 247.$

448. Corollario 2.º — Dato il primo e l'ultimo termine di una progressione aritmetica, si potrà fra questi inserire un numero qualunque di medii aritmetici.

Esempio: — Vogliasi inserire fra 2 e 26 *sette* medii aritmetici. — Rappresentando con r la ragione, ed osservando che

è preceduto da 8 termini, si avrà l'equazione:

$$26 = 2 + 8 \times r;$$

gliendo 2 dai due membri, si ottiene.

$$26 - 2 = 8 \times r;$$

dividendo pel coefficiente 8 da ambe le parti, si trova:

$$r = \frac{26 - 2}{8} = \frac{24}{8} = 3.$$

Trovata la ragione 3, è facile comporre la progressione, quale sarà:

$$\div 2 \,.\, 5 \,.\, 8 \,.\, 11 \,.\, 14 \,.\, 17 \,.\, 20 \,.\, 23 \,.\, 26;$$

osì si sono inseriti sette medii aritmetici fra 2 e 26.

449. In generale, rappresentando con a il primo termine, l l'ultimo termine di una progressione aritmetica, con r la ione e con m il numero dei medii da inserire, si avrà sem- l'equazione:

$$l = a + (m + 1) \times r;$$

la quale $\quad (m + 1) \times r = l - a;$

er conseguenza:

$$(3) \; \ldots\ldots\ldots \; r = \frac{l - a}{m + 1};$$

nula che, tradotta in linguaggio ordinario, dice: *la ragione ma progressione aritmetica si ottiene prendendo la differenza i estremi, e dividendola pel numero dei medi da inserire, più uno.*

Così, se 5 è il primo termine, 40 l' ultimo termine d'una ressione aritmetica, 4 il numero dei medii da inserire fra 40, si avrà:

$$r = \frac{40 - 5}{5} = \frac{35}{5} = 7;$$

indi la progressione:

$$\div \; 5. \; 12. \; 19. \; 26. \; 33. \; 40.$$

450. Teorema 2.° — *Se in una progressione per differenza s'in- e uno stesso numero di medii aritmetici fra ciascun termine seguente, la nuova serie sarà ancora una progressione per enza.*

Infatti, le progressioni parziali che si ottengono hanno la ragione: e poichè l'ultimo termine dell'una è il primo seguente, il loro insieme forma ancora una progressione etica.

Esempio. — Sia la progressione

$$\div\ 2.\ 8.\ 14.\ 20.$$

Inserendo due medii fra 2 e 8, fra 8 e 14, fra 14 e 20, le respettive ragioni, per la formula precedente (3) sono:

$$\frac{8-2}{3}=\frac{6}{3}=2:\ \frac{14-8}{3}=\frac{6}{3}=2;\frac{20-14}{3}=\frac{6}{3}=2.$$

Quindi si ottiene la progressione:

$$\div\ 2.\ 4.\ 6.\ 8.\ 10.\ 12.\ 14.\ 16.\ 18.\ 20.$$

451. Teorema 3.° — *In qualunque progressione aritmetica la somma dei termini estremi è uguale alla somma dei termini equidistanti dagli estremi.*

Infatti, sia la progressione

$$\div\ a.\ b.\ c.\ d.\ e.\ f.$$

E sia r la ragione.

Prendendo i due termini b ed e, che sono equidistanti dagli estremi, per difinizione si ha:

$$b = a + r$$
$$e = f - r.$$

Sommando membro a membro queste due uguaglianze, si trova:

$$b + e = a + f + r - r;$$

ossia $b + e = a + f$; perchè $+ r - r$ si annullano.

Ora $b + e$ è la somma di due termini equidistanti dagli estremi; $a + f$ è la somma dei termini estremi; dunque è dimostrato che *in una progressione aritmetica la somma dei termini estremi uguaglia la somma dei termini presi ad uguale distanza dagli estremi.* — La dimostrazione sarebbe stata la stessa, se si fossero presi i termini c e d; giacchè in questo caso si avrebbe:

$$c = a + 2r$$
$$d = f - 2r;$$

e quindi:

$$c + d = a + f.$$

452. Corollario. — Quando il numero dei termini d' una progressione per differenza è impari, il termine di mezzo è la metà della somma degli estremi; esso è dunque la *media aritmetica* fra questi due termini.

453. Teorema 4.° — *Il termine sommatorio di una progressione per differenza è uguale alla semi-somma dei termini estremi, moltiplicata pel numero dei termini che la compongono.*

Infatti, abbiasi la progressione

$$\div a \,.\, b \,.\, c \,.\, d \,.\, e \,.\, f.$$

Indicando con S il termine sommatorio,

sarà $\quad S = a + b + c + d + e + f;$

e inversamente $S = f + e + d + c + b + a.$

Sommando membro a membro queste due uguaglianze, si avrà

$$S + S = 2\,S = (a + f) + (b + e) + (c + d) + (d + c) + (e + b) + (f + a).$$

Ora, pel teorema precedente, i termini fra parentesi dànno somme uguali; onde se con n si rappresenta il numero di queste parentesi, avremo:

$$2\,S = (a + f) \times n;$$

da cui, dividendo ambi i membri per 2,

$$S = \frac{(a + f) \times n}{2},$$

oppure

$$S = \frac{(a + f)}{2} \times n \,.\,.\,.\,.\,.\,.\,.\,.\, (4)$$

Ciò che bisognava dimostrare.

455. Esempio 1.° — *Si domanda la somma dei* 3000 *primi numeri interi* 1, 2, 3, 4, 5 . . . .

Applicando la formula trovata (4), si ha:

$$a = 1\,;\, f = 3000\,;\, n = 3000\,;$$

e quindi:

$$S = \frac{(1 + 3000)}{2} \times 3000 = \frac{9003000}{2} = 4501500.$$

456. Esempio 2.° — *Si domanda la somma dei* 90 *primi numeri impari* 1, 3, 5, 7, 9 . . . .

Per risolvere il problema bisogna primieramente calcolare il 90° termine della progressione, che sarà dato dalla formula (1) n.° 447, cioè

$$x = 1 + (89 \times 2) = 179.$$

Ora, applicando la formola (4), si ha:

$$a = 1 \; ; \; f = 179 \; ; \; n = 90 \; :$$

e quindi:

$$S = \frac{(1 + 179)}{2} \times 90 = \frac{180}{2} \times 90$$

$$= 90 \times 90 = 90^2 = 8100.$$

Dal che si deduce che in generale la somma degli n primi numeri impari è uguale al quadrato di n.

PROBLEMI

Sulle progressioni aritmetiche.

335. Un operaio nel 1858 depose nella cassa di risparmio Lire 30, e per procurarsi un sussidio in vecchiaia si propose di fare lo stesso negli anni futuri, collocando però ogni anno 5 lire di più. — Si domanda qual somma dovrà depositare nel 1870. (formula 1).

R. — Lire 90.

336. Si domanda la somma di tutti i numeri nella serie naturale da 1 a 10000 inclusivamente. (formula 4).

R. — Somma: 50005000.

337. Qual' è la somma dei primi 120 numeri impari? (formula 1 e 4).

R. — Somma 14400.

338. Un signore dette nel primo anno ad un suo cameriere Lire 260 per salario, promettendo di aumentarglielo ogni anno di Lire 30, se continuava a soddisfarlo. Essendosi questi ben disimpegnato de' suoi doveri, si chiede qual somma abbia ricevuto dopo 15 anni di servizio (formule 1 e 4).

R. — L. 7050.

339. Un proprietario ha convenuto con un operaio, che deve scavargli un pozzo, di dargli 1 lira pel primo metro, 3 lire pel secondo metro, e così di seguito, fino ad una profondità di 17 metri, ove deve trovare l' acqua. — Si domanda quanto l' operaio avrà guadagnato in tutto alla fine del suo lavoro, (formule 1 e 4).

R. — Lire 289.

340. Quante ore batte un orologio ad ogni giro del quadrante? (formula 4).

R. — Ore 78.

Progressioni geometriche.

457. Una *progressione geometrica*, o *per quoziente*, è una serie di numeri tali, che il quoziente della divisione di ciascuno di essi pel precedente è costante.

Questo quoziente chiamasi *ragione* della progressione.

Una progressione per quoziente è *crescente* o *decrescente*, secondo che la ragione è maggiore o minore dell'unità.

Esempio: — I numeri 2, 6, 18, 54, 162 . . . . . formano una progressione per quoziente, la cui ragione è 3, che scrivesi:

$$\div\!\!\div\; 2 : 6 : 18 : 54 : 162 \ldots\ldots,$$

e si legge: 2 *sta a* 6, *sta a* 18, *sta a* 54 ec.

I numeri $2,\ \frac{2}{3},\ \frac{2}{9},\ \frac{2}{27},\ \frac{2}{81} \ldots\ldots\ldots$

formano una progressione decrescente, la cui ragione è $\frac{1}{3}$.

Teoremi fondamentali.

458. Teorema 1.° — *Ciascun termine di una progressione per quoziente è medio proporzionale fra quello che lo precede e quello che lo segue.*

Infatti, sia la progressione

$$\div\!\!\div\; a : b : c : d : e \ldots\ldots$$

Per definizione si ha:

$$\frac{b}{a} = \frac{c}{b} = \frac{d}{c} = \frac{e}{d}.$$

Dall'uguaglianza dei primi due rapporti si ricava

$$b : a :: c : b;$$

e ponendo gli estremi in luogo dei medii (n.° 364):

$$a : b :: b : c.$$

Dunque b è medio proporzionale fra a e c. La stessa dimostrazione prova che c è medio proporzionale fra b, e d; e d è medio proporzionale fra c ed e.

459. Teorema 2.° — *Un termine qualunque di una progressione per quoziente è uguale al primo, moltiplicato per una potenza*

della ragione, avente per esponente il numero dei termini che lo precedono; ed è uguale all'ultimo, diviso per una potenza della ragione, avente per esponente il numero dei termini che lo seguono.

1.° Infatti, sia la progressione

$\div\div a : b : c : d \ldots\ldots\ldots l$; sia r la ragione.

Per definizione si ha:

$$b = a \times r;\ c = b \times r;\ d = c \times r \ldots\ldots$$

Sostituendo nella seconda uguaglianza, a b il suo valore $(a \times r)$, essa diviene

$$c = a \times r \times r = a \times r^2$$

Sostituendo questo valore di c nella terza uguaglianza, si ottiene

$$d = a \times r^2 \times r = a \times r^3$$

Se dunque si rappresenta con l l'*ennesimo* termine, cioè quello che ha $n - 1$ termini avanti a sè, avremo la formula

(1) $\ldots\ldots l = a \times r^{n-1}$.

2.° Per definizione si ha pure:

$$c = \frac{d}{r};\ b = \frac{c}{r};\ a = \frac{b}{r} \ldots\ldots$$

Sostituendo nella seconda uguaglianza a c il suo valore $\left(\frac{d}{r}\right)$ si trova

$$b = \frac{d}{r} : r = \frac{d}{r^2}.$$

Sostituendo questo valore di b nell' ultima uguaglianza, si ha

$$a = \frac{d}{r^2} : r = \frac{d}{r^3}.$$

In generale dunque, se indichiamo con d l' ultimo termine della progressione, e con l il termine *ennesimo*, avremo la formula:

(2) $\ldots\ldots l = \frac{d}{r^{n-1}}$.

Le due formule trovate dimostrano la verità del teorema.

460. Corollario. — Questo teorema somministra il modo di trovare un termine di posto qualunque.

Vogliasi, per esempio, il *nono* termine della progressione $\div 3 : 6 : 12 \ldots\ldots$, la cui ragione è 2. — Sostituendo nella formula (1) a ciascuna lettera il suo valore, si ha:

$$a = 3;\ r = 2;\ n = 9;\ \text{quindi}$$
$$l = 3 \times 2^8 = 3 \times 256 = 768.$$

461. Corollario 2.° — Dati gli estremi di una progressione per quoziente, il teorema precedente dà il modo d'inserire fra questi un numero qualunque di medj geometrici.

Debbansi, per esempio, inserire fra 3 e 48 *tre* medj geometrici.

Chiamando x la ragione, e osservando che 48 è preceduto da quattro termini, si ha l'equazione:

$$48 = 3 \times x^4;$$

dividendo per 3 ambi i membri, si ottiene:

$$\frac{48}{3} = x^4, \text{ o } x^4 = \frac{48}{3};$$

ed estraendo la radice da ambe le parti, si troverà:

$$x = \sqrt[4]{\frac{48}{3}} = \sqrt[4]{16} = \sqrt{\sqrt{16}} = \sqrt{4} = 2.$$

Conosciuta la ragione 2, la progressione sarà:

$$\div\div\ 3 : 6 : 12 : 24 : 48.$$

462. In generale, rappresentando con a ed l gli estremi di una progressione geometrica, con x la ragione e con m il numero dei medj da inserire, si avrà sempre l'equazione:

$$l = a \times x^{m+1};$$

da cui:

$$x^{m+1}; = \frac{l}{a},$$

e, per conseguenza:

$$(3) \ldots\ldots x = \sqrt[m+1]{\frac{l}{a}};$$

formula, che, tradotta in linguaggio ordinario, dice: *la ragione di una progressione geometrica si ottiene dividendo l'uno per l'altro gli estremi dati, ed estraendo dal quoziente una radice di un grado uguale al numero dei medj da inserire più uno.*

463. Teorema 3.° — *Data una progressione geometrica, se s' inserisce un egual numero di medj geometrici fra ciascun termine ed il seguente, si ha sempre una progressione.*

Infatti, le progressioni parziali che si ottengono hanno la stessa ragione; e poichè l' ultimo termine dell' una è il primo della seguente, il loro insieme forma ancora una progressione per quoziente.

Esempio. — Sia la progressione

$$\div\!\div\; 3 : 48 : 768 : 12288.$$

Inserendo 3 medj fra 3 e 48, fra 48 e 768, fra 768 e 12288, le respettive ragioni, essendo 16 la ragione primitiva, per la formula precedente (3) sono:

$$\sqrt[4]{\frac{48}{3}}=\sqrt[4]{16}=2;\quad \sqrt[4]{\frac{768}{48}}=\sqrt[4]{16}=2;$$

$$\sqrt[4]{\frac{12288}{768}}=\sqrt[4]{16}=2;$$

dal che si vede che la nuova ragione è la radice quarta della ragione primitiva; per cui si passa da un termine all' altro per progressione, la quale sarà:

$$\div\!\div\; 3 : 6 : 12 : 24 : 48 : 96 : 192 : 384 : 768 : 1536 : 3072 : 6144 : 12288.$$

464. Teorema 4.° — *In qualunque progressione geometrica il prodotto degli estremi è uguale al prodotto dei termini equidistanti dagli estremi.*

Sia la progressione

$\div\!\div\; a : b : c : d : e : f$; ed r la ragione.

Prendendo due termini qualunque, per esempie b ed e, equidistanti dagli estremi, per definizione si ha:

$$b = a \times r$$
$$e = f : r.$$

Moltiplicando membro a membro queste due uguaglianze, si ottiene:

$b \times e = a \times f \times r : r$; ovvero $b \times e = a \times f$, perchè $r : r$ è uguale all' unità.

Ora, $b \times e$ è il prodotto di due termini egualmente distanti dagli estremi, $a \times f$ è il prodotto degli estremi, dunque

è così dimostrato che *in ogni progressione geometrica il prodotto degli estremi uguaglia il prodotto dei termini equidistanti dagli estremi.* — La dimostrazione sarebbe stata la stessa, se si fossero presi i due termini c e d; giacchè in questo caso si avrebbe:

$$c = a \times r^2$$
$$d = f : r^2;$$

e quindi :

$$c \times d = a \times f.$$

465. Corollario. — Quando il numero dei termini di una progressione geometrica è impari, il termine di mezzo è la radice quadrata del prodotto degli estremi ; esso è dunque il *medio proporzionale* fra questi due estremi.

466. Teorema 5.° — *Il prodotto dei termini d' una progressione per quoziente è uguale alla radice quadrata del prodotto degli estremi, innalzato ad una potenza, il cui grado è uguale al numero dei termini.*

Abbiasi la progressione

$$\div\; a : b : c : d : e : f.$$

Indicando con P il prodotto di tutti i termini, si ha :

$$P = a \times b \times c \times d \times e \times f.$$

Inversamente: $P = f \times e \times d \times c \times b \times a.$

Moltiplicando queste due uguaglianze membro a membro, si ottiene :

$$P^2 = (a \times f) \times (b \times e) \times (c \times d) \times (d \times c)$$
$$\times (e \times b) \times (f \times a).$$

Ora, pel teorema precedente, i prodotti fra parentesi sono tutti uguali ; quindi chiamando n il numero di queste parentesi, potremo scrivere :

$$P^2 = (a \times f)^n;$$

ed estraendo la radice qnadrata da ambi i membri ;

$$(4) \ldots\ldots\ P = \sqrt{(a \times f)^n}\,,$$

il che dimostra il teorema enunciato.

467. Teorema 6°. — *Il termine sommatorio di una progressione geometrica è uguale alla differenza fra l'ultimo termine moltiplicato per la ragione, e il primo termine, divisa per la differenza che passa fra la ragione e l'unità.*

Sia la progressione

$$\div\; a : b : c : d : e : f.$$

Chiamando S il termine sommatorio ed r la ragione, si avrà:

$$S = a + b + c + d + e + f \ldots\ldots\ldots (X)$$

Moltiplichiamo i due membri di questa uguaglianza per la ragione r; si otterrà:

$$S \times r = a \times r + b \times r + c \times r + d \times r + e \times r + f \times r.$$

Ma, per ipotesi

$$a \times r = b;\ b \times r = c;\ c \times r = d;\ d \times r = e;\ e \times r = f;$$

quindi potremo sostituire nell' uguaglianza precedente a ciascun termine il suo valore, con che avremo:

$$S \times r = b + c + d + e + f + f \times r \ldots\ldots\ldots (Y)$$

Ora, sottraendo l' uguaglianza (X) dalla (Y) membro a membro, risulterà:

$$S \times r - S = (b + c + d + e + f + f \times r) - (a + b + c + d + e + f),$$

ovvero (vedi n.º 91):

$$S \times r - S = b + c + d + e + f + f \times r - a - b - c - d - e - f;$$

e riducendo, resterà:

$$S \times r - S = f \times r - a;$$

ovvero:

$$S \times (r - 1) = f \times r - a;$$

e, per conseguenza:

$$(5) \ldots\ldots\ldots S = \frac{f \times r - a}{r - 1};$$

come bisognava dimostrare.

Se la progressione è decrescente, la formula (5) si trasforma nell' altra:

$$(6) \ldots\ldots\ldots S = \frac{a - f \times r}{1 - r}.$$

468. Esempio 1.º — *Si domanda la somma dei primi* 12 *termini della serie*

1, 2, 4, 8, 16 . . . .

Questi numeri formano una progressione per quoziente crescente; il primo termine è 1, la ragione è 2, e per conseguenza

il dodicesimo termine è 2^{11}. Cosicchè la formula (5) dà, per la somma richiesta:

$$S = \frac{2^{11} \times 2 - 1}{2 - 1} = 2^{12} - 1;$$

ed effettuando il calcolo, si troverà:

$$S = 4096 - 1 = 4095.$$

469. Esempio 2.° — *Si domanda la somma dei primimi* 12 *termini della serie*

$$1, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8} \ldots\ldots\ldots\ldots$$

Questi numeri formano una progressione per quoziente decrescente; il primo termine è 1, la ragione $\frac{1}{2}$, e per conseguenza, il dodicesimo termine è $\frac{1}{2^{11}}$.

Così la formula (6) dà, per la somma richiesta:

$$S = \frac{1 - \frac{1}{2^{11}} \times \frac{1}{2}}{1 - \frac{1}{2}} = \frac{1 - \frac{1}{2^{12}}}{\frac{1}{2}} = \left(1 - \frac{1}{2^{12}}\right) \times 2;$$

e sviluppando quest' ultima espressione:

$$\left(1 - \frac{1}{2^{12}}\right) \times 2 = 2 - \frac{2}{2^{12}} = 2 - \frac{1}{2^{11}} = 2 - \frac{1}{2048} = \frac{4095}{2048}.$$

PROBLEMI

sulle progressioni geometriche.

341. Un contadino semina annualmente tutto il grano che raccoglie; nel primo anno ne semina 3 ettolitri, ed in ciascuno degli anni successivi duplica il raccolto dell' anno precedente. — Si domanda quanti ettolitri ne raccoglierà nel quindicesimo anno (formula 1).

R. — Ettolitri 49152.

342. Un operaio pone nella cassa di risparmio lire 5, e pretende di volere ogni anno collocare il triplo dell'anno precedente. — Si domanda qual somma dovrebbe risparmiare nell'undicesimo anno (formula 1).

R. — Lire 295245.

343. Un mercante in 7 anni pagò un debito col quadruplicare ogni anno il suo pagamento. — Domandasi, quanto abbia pagato la prima volta, sapendo che l'ultimo pagamento fu di lire 81920. (formula 2).

R. — Lire 20.

344. Un vinaio attinse da un gran tino il lunedì 2 litri di vino, e in ciascun giorno successivo sempre il quadruplo del giorno precedente, sino alla domenica, in cui ne attinse 8192 litri. — Si vuol sapere quanti litri ne abbia attinto in tutta la settimana (formula 5).

R. — Litri 10922.

345. Si domanda la somma dei primi 10 termini della serie 1, 2, 4, 8 . . . . (formula 5).

R. — Somma 1023.

Teoria dei logaritmi.

470. I *logaritmi* sono numeri in progressione aritmetica, il cui primo termine è *zero*, i quali corrispondono termine a termine ad altri numeri in progressione geometrica, il cui primo termine è l' *unità*, qualunque sia la ragione delle due progressioni.

ESEMPIO.

$\div\!\div$ 1 : 3 : 9 : 27 : 81 : 243 : 729 : 2187 : 6561 .... num.
$\div$ 0 . 2 . 4 . 6 . 8 . 10 . 12 . 14 . 16 .... log.

Ogni termine della seconda serie è chiamato *logaritmo* del numero corrispondente della prima.

Così 0 è il logaritmo di 1; 2 è il logaritmo di 3; 4 lo è di 9 ec.

Proprietà dei logaritmi.

471. Teorema 1.° — *Il logaritmo d' un prodotto è uguale alla somma dei logaritmi dei fattori.*

Sieno le due progressioni

$\div\!\div$ 1 : a : b : c : d : e : f . . . .
$\div$ 0 . a' . b' . c' . d' . e' . f' . . . .

Prendendo nella prima due termini ugualmente distanti dagli estremi, per esempio b e d, avremo (vedi n.° 464):

$1 \times f = b \times d$, o semplicemente, $f = b \times d$.

Ora, prendendo nella seconda progressione i due termini corrispondenti b' e d', i quali sono pure equidistanti dagli estremi, si ha (n.° 451):

$$0 + f = b' + d', \text{ o semplicemente } f = b' + d'.$$

Ma b' è il logaritmo di b; d' è il logaritmo di d, ed f' è il logaritmo di f; dunque nell' equazione $f' = b' + d'$ sostituendo a ciascun termine il suo valore, avremo:

$$\log. f = \log. b + \log. d;$$

ossia $\log. (b \times d) = \log. b + \log. d$, (1)

come si voleva dimostrare.

472. Corollario 1.° — Questo teorema riduce qualunque moltiplicazione ad un' addizione. — Infatti, per fare il prodotto di due numeri basterà sommare i logaritmi di questi stessi numeri, e cercare per mezzo delle *Tavole dei logaritmi* il numero corrispondente alla somma di essi.

Esempio. — Per moltiplicare 27 per 9, basta aggiungere **6 a 4**, che sono i logaritmi corrispondenti; si avrà 10, il quale corrisponde al numero 243, che sarà il prodotto cercato.

473. Corollario 2.° — Il teorema precedente si estende ad un numero qualunque di fattori.

Sia il prodotto $a \times b \times c$.

Si ha: $\log. (a \times b \times c) = \log. (a \times b) \times c$
$= \log. (a \times b) + \log. c.$

Ma $\log. (a \times b) = \log. a + \log. b$;

dunque $\log. (a \times b \times c) = \log. a + \log. b + \log. c.$

Così $\log. (27 \times 9 \times 81) = \log. 27 + \log. 9 + \log. 81$
$= 6 + 4 + 8 = 18$; (vedi n.°470);

a 18 corrisponde il numero 19683, che è il prodotto cercato.

474. Teorema 2.° — *Il logaritmo di una potenza d'un numero è uguale al prodotto del logaritmo del numero per l'esponente della potenza.*

Infatti, abbiasi la potenza 3^4; si ha;

$$3^4 = 3 \times 3 \times 3 \times 3; \text{ e quindi (n.° 473).}$$

$$\log. 3^4 = \log. 3 + \log. 3 + \log. 3 + \log. 3 = 4 \times \log. 3.$$

In generale $\log. A^n = n \times \log. A$.

(1) L'abbreviazione *log.* si legga *logaritmo di*.

Questa proposizione è una conseguenza evidente del teorema 1.°

475. Corollario. — Per formare dunque una potenza qualunque di un numero, basta prendere il logaritmo di questo numero, moltiplicarlo per l' esponente, e cercare nelle Tavole il numero corrispondente al prodotto.

Così, per avere la potenza 3^8, si prenderà il logaritmo di 3 che è 2 (n.° 470), il quale moltiplicato per l'esponente 8, dà 16 ; a 16 corrisponde il numero 6561, che è appunto l'ottava potenza di 3.

476. Teorema 3.° — *Il logaritmo del quoziente di due numeri è uguale al logaritmo del dividendo meno quello del divisore.*

Supponiamo che il quoziente di due numeri A e B sia q;

avremo (n.° 70): $A = B \times q$;

e pel Teorema 1°:

$$\log. A = \log. B + \log. q.$$

Togliendo log. B dai due membri di questa uguaglianza, resterà:

$\log. A - \log. B. = \log. q$; ossia $\log. q = \log. A - \log. B$,

che è quanto si doveva dimostrare.

477. Corollario. — Questo teorema riduce qualunque divisione ad una sottrazione. — Infatti, si vede che per avere il quoziente della divisione di due numeri, basta togliere dal logaritmo del dividendo il logaritmo del divisore; il numero corrispondente alla differenza, sarà il quoziente cercato.

Esempio. — Debbasi dividere 243 per 27. — Il logaritmo di 243 è 10 (n.° 470); quello di 27 è 6; quindi $10 - 6 = 4$; il numero 9 corrispondente al logaritmo 4, è il quoziente richiesto.

478. Teorema 4.° — *Il logaritmo della radice d' un numero è uguale al logaritmo del numero, diviso per l'indice della radice.*

Infatti, sia $\sqrt[n]{A} = x$;

elevando ambi i membri alla potenza ennesina, si ottiene:

$$A = x^n ;$$

e pel teorema 2°,

$$\log. A = n \times \log. x ;$$

da cui, dividendo per n ambedue i membri:

$$\frac{\log. A}{n} = \log. x ; \text{ ossia } \log. x = \frac{\log. A}{n} ;$$

e, per conseguenza:

$$\log. \sqrt[n]{A} = \frac{\log. A}{n},$$

il che era da dimostrare.

479. Corollario. — Per estrarre dunque la radice d'un grado qualunque da un numero dato, basta prendere il logaritmo del numero e dividerlo per l'indice della radice; il numero avente per logaritmo il quoziente, sarà la radice richiesta.

Esempio. — Debbasi estrarre la radice terza da 729. — Il logaritmo di 729 è 12, che diviso per 3, dà 4 di quoziente. Al logaritmo 4 corrisponde il numero 9, che è la radice cubica cercata.

480. Da ciò che precede si conclude che: *una moltiplicazione può essere sostituita dall'addizione di due o più logaritmi; una divisione dalla sottrazione di due logaritmi; un' elevazione a potenza da una moltiplicazione e finalmente l' estrazione di radice d' un grado qualunque, dalla divisione del logaritmo del numero dato per l' indice della radice.*

Ma per trarre profitto dalle proprietà dei logaritmi, è necessario: 1.° saper trovare nelle Tavole il logaritmo d' un numero dato; 2.° saper trovare il numero corrispondente ad un logaritmo proposto.

Perciò crediamo fare cosa grata ai lettori, spiegando in brevi parole la disposizione e l'uso delle *Tavole dei logaritmi di De Lalande*, che, fra quelle di molti altri autori, sono le più in uso. — È dunque indispensabile, per comprendere ciò che segue, aver sott' occhio le Tavole di *De Lalande*, estese a sette decimali da *F. C. Marie* — Bruxelles — 1860.

Cenni preliminari.

481. Si chiamano *logaritmi volgari* o *decimali* quelli, la cui formazione è fondata sul sistema delle due progressioni seguenti:

$$\div\!\!\div\; 1 : 10 : 100 : 1000 : 10000 \ldots .$$

$$\div\; 0 \,.\, 1 \,.\, 2 \,.\, 3 \,.\, 4 \ldots ..$$

Resulta dall' ispezione di queste due progressioni:

1.° Che il logaritmo dell' unità è 0;

2.° Che il logaritmo di 10 è 1;

3.° Che il logaritmo di tutti i numeri interi o frazionari compresi fra 1 e 10, sono *più piccoli dell' unità*; che quelli dei numeri compresi fra 10 e 100, si compongono di *una unità e di una frazione;* che quelli dei numeri compresi fra 100 e 1000 si compongono di *due unità e di una frazione,* e così di seguito.

482. Queste frazioni sono valutate in decimali; dunque i logaritmi dei numeri d'una sola cifra sono rappresentati da una frazione decimale propriamente detta; i logaritmi dei numeri di due cifre hanno 1 per parte intera, seguita da una frazione decimale; i logaritmi dei numeri di tre cifre hanno 2 per parte intera ec. — In generale, *la parte intera del logaritmo, racchiude tante unità meno una, quante sono le cifre del numero se è intero, o della parte intera di questo numero, se è frazionario.*

La parte intera d'un logaritmo chiamasi *caratteristica,* e la parte decimale dicesi *mantissa.*

Così, nel logaritmo 2,7405621, la caratteristica è 2, e la mantissa à 7405621; e per ciò che abbiamo detto, questo logaritmo corrisponderà ad un numero di *tre cifre,* vale a dire ad un numero compreso fra 100 e 1000; parimente il logaritmo 4,0567823 corrisponde ad un numero di *cinque* cifre, cioè compreso fra 10000 e 100000.

483. Conoscendo il logaritmo d' un numero qualunque, si può facilmente ottenere quello di un numero 10, 100, 1000 .... volte più grande. A tale oggetto basta aggiungere 1, 2, 3 ...... unità alla caratteristica.

Infatti, sia A un numero di cui si conosce il logaritmo; si ha (n.° 471):

$$\log.\ (A \times 10) = \log.\ A + \log.\ 10 = \log.\ A + 1,$$
$$\log.\ (A \times 100) = \log.\ A + \log.\ 100 = \log.\ A + 2,\ \text{ec.}$$

Reciprocamente, conoscendo il logaritmo d' un numero, si ottiene quello d'un numero 10, 100, 1000 ..... volte più piccolo, togliendo 1, 2, 3 ..... unità dalla caratteristica.

Infatti, si ha (n.° 476):

$$\log.\ \frac{A}{1000} = \log\ A - \log.\ 1000 = \log.\ A - 3;$$
$$\log.\ \frac{A}{10} = \log.\ A - \log.\ 10 = \log.\ A - 1,\ \text{ec.}$$

484. Da ciò resulta che i logaritmi dei numeri

4567 ; 456,7; 45,67 ; 4, 567,

per esempio, non differiscono gli uni dagli altri nella parte decimale, ma soltanto nella caratteristica, che è 3 pel primo numero, 2 pel secondo, 1 pel terzo, e 0 pel quarto.

Disposizione delle Tavole di De Lalande.

485. Queste tavole contengono nelle prime **112** pagine i logaritmi di tutti i numeri interi da 1 a 10000. — I logaritmi dei primi 990 numeri hanno 8 cifre decimali; quelli degli altri ne hanno solamente 7.

I numeri interi sono collocati secondo il loro ordine naturale nelle colonne verticali segnate *Nomb.* (numeri), le quali sono tre per ogni pagina; e i loro logaritmi corrispondenti sono posti a destra nelle colonne parimente verticali, intitolate *Logarit.* (logaritmi).

Così, vedesi nella pagina 1.ª che il log. di 85 è 1,92940893, che scrivesi log. 85 = 1,92941893. — La differenza che passa fra i logaritmi di due numeri consecutivi, maggiori di 990, trovasi alla loro destra nella colonna segnata *Diff.* (differenza), la quale chiamasi *Differenza tavolaria*; l' ultima sua cifra a destra esprime *diecimilionesimi di unità.*

Così, la differenza fra i logaritmi dei numeri 993 e 994 è 4371, ed è uguale a 0,0004371; e quella fra i logaritmi dei numeri 5826 e 5827 è 745; ed equivale a 0,0000745.

La differenza di due numeri consecutivi minori di 990 non è registrata nelle tavole, perchè non è necessaria.

Uso delle Tavole.

486. PROBLEMA 1.° — *Dato un numero qualunque, determinare il suo logaritmo.*

REGOLA. — *Il logaritmo d' un numero intero, non maggiore di* 10000, *trovasi per intero nelle tavole.*

Per trovare quello di un numero intero maggiore di 10000, *scrittane la caratteristica* (n.° 482), *si separano sulla sua destra tante cifre, che a sinistra ne rimangano soltanto quattro. — Si cerca nelle tavole la mantissa della parte intera a sinistra, e si moltiplica la parte decimale separata per la differenza tavolaria; il prodotto si aggiunge al logaritmo già trovato, ed il risultato sarà il logaritmo del numero proposto.*

Se il numero è decimale, si scrive la caratteristica (n.° 483), *del logaritmo del numero proposto ; e, soppressa la virgola, se ne cerca la mantissa secondo la regola precedente.*

ESEMPI.

1.° *Domandasi il logaritmo di* 3725.

Questo numero è intero ed ha 4 cifre ; dunque (n.° 482) la caratteristica del suo logaritmo è 3. — Cercando nelle tavole il numero 3725, trovo a pagina 42 che la mantissa del suo logaritmo è 5711263.

Dunque sarà log. 3725 = 3,5711263.

2.° *Trovare il logaritmo di* 37, 25.

Le cifre della parte intera sono due, dunque la caratteristica del logaritmo cercato è 1. — Soppressa la virgola, il numero diviene 3725; ora sappiamo (n.° 483) che la mantissa del logaritmo di 37,25 è uguale a quella del logaritmo di 3725, per conseguenza :

$$\log.\ 37,\ 25 = 1,\ 5711263.$$

Si troverà al modo stesso:

$$\log.\ 3,\ 725 = 0,\ 5711263;$$
$$\log.\ 372,\ 5 = 2,\ 5711263;$$
$$\log.\ 612 = 2,\ 7867514\ ;$$
$$\log.\ 61{,}2 = 1,\ 7867514\ ;$$
$$\log.\ 6{,}12 = 0,\ 7867514\ \text{ec.}$$

3.° *Domandasi il logaritmo di* 587263.

Questo numero ha più di quattro cifre ; scritta subito la caratteristica 5, si separano a destra con una virgola le cifre che vi sono oltre le prime quattro, e risulterà il numero 5872, 63. — Ciò fatto, cercasi la mantissa della parte intera, cioè di 5872, e trovasi 5, 7687860.

Ora il numero dato 587263 essendo compreso fra 5872 e 5873, il suo logaritmo sarà pure compreso fra i logaritmi di questi due numeri. La differenza tavolaria di questi due numeri, come vedesi nelle tavole a pag. 66, è 740 *diecimilionesimi.* Si moltiplica questo nunero per 0,63, che è il numero separato di sopra, e si ha

$$740 \times 0{,}63 = 466,\ 20.$$

Aggiungendo il prodotto 466 diecimilionesimi alla mantissa 7687860, trascurata la parte decimale 20, si ottiene

$$\log.\ 587263 = 5,\ 7688326.$$

Ecco il tipo del calcolo:

Numero dato 587263; caratteristica 5.

Log. 5872.	5, 7687860; differ. tavol.	740.
Prodotto 740 × 0,63 . . .	466	0,63
Log. 587263	5, 7688326	2220
		4440
		466,20

4.° *Domandasi il logaritmo di* 3, 14159.

La parte intera di questo numero ha una sola cifra, quindi la caratteristica è 0.

La mantissa poi è la stessa di quella del logaritmo del numero 3141, 59.

Si cerca dunque nelle tavole il numero 3141, e si trova che la mantissa corrispondente è 4970679; la differenza tavolaria è 1383. — Si fa il prodotto di 1383 per 0, 59, e si ha 815,97. — Aggiungendo 815, o meglio, per più approssimazione, 816, a 4970679, avremo:

$$\log.\ 3,\ 14159 = 0,\ 4971495.$$

Operazione.

Numero dato 3, 14159; caratteristica 0.

Log. 3141.	0, 4970679; differ. tavol.	1383
Prodotto 1385 × 0,59 816		0,59
Log. 2, 14159 . . .	0, 4971495	12447
		6915
		815,97

Per esercizio, si potranno verificare le seguenti uguaglianze:

$$\text{Log. } 10091 = 4{,}0039342.$$
$$\text{Log. } 20{,}04571 = 1{,}3020214.$$
$$\text{Log. } 98717{,}98 = 4{,}9943972.$$
$$\text{Log. } 1{,}0507 = 0{,}0214787.$$

LOGARITMO D' UNA FRAZIONE ORDINARIA O DECIMALE.

487. Regola. — *Nell' uno e nell' altro caso basta sottrarre il logaritmo del denominatore dal logaritmo del numeratore; la differenza sarà il logaritmo cercato.*

Esempi.

$$\text{Log.}\ \frac{4}{5} = \text{log. } 4 - \text{log. } 5 = 0{,}60205999 - 0{,}69897000$$
$$= -\ 0{,}09691001.$$

$$\text{Log. } 0{,}491 = \text{log. } 491 - \text{log. } 1000$$
$$= 2{,}69108149 - 3{,}00000000 = -\ 0{,}30891851.$$

Questi logaritmi si chiamano *negativi*, perchè preceduti dal segno (—).

488. Problema 2.° — *Dato un logaritmo positivo o negativo, trovare il numero corrispondente.*

1.° Caso — Regola. — *Qualunque sia la caratteristica del logaritmo dato, si cerca la sua mantissa nelle tavole nelle colonne intitolate* Logarit., *e per maggiore facilità, si cerca sempre fra i logaritmi dei numeri maggiori di* 1000, *cioè fra i logaritmi, la cui caratteristica è* 3. — *Se questa mantissa trovasi registrata nelle tavole, allora:*

Se la caratteristica del logaritmo dato è 3, *il numero corrispondente a sinistra nella colonna* Nomb. *è quello che si cerca;*

Se la caratteristica del logaritmo dato è maggiore di 3, *a destra del numero corrispondente si devono aggiungere tanti zeri, finchè si ottenga un numero di tante cifre quante sono le unità della caratteristica, più una;*

Se finalmente la caratteristica del logaritmo dato è minore di 3, *a destra del numero corrispondente nelle tavole si devono separare tante cifre, che ne resti a sinistra un numero uguale alle unità della caratteristica, più una* (vedi n.° 483).

Quando la mantissa del logaritmo dato non si trova esattamente nelle tavole, si prende il numero corrispondente al logaritmo immediatamente minore, ed alla sua destra si aggiungono le prime due cifre ottenute, prendendo la differenza fra il logaritmo dato e il logaritmo immediatamente minore trovato nelle tavole, divisa per la differenza tavolaria dei due logaritmi, fra cui è compreso il lo-

garitmo proposto. — Il numero delle cifre della parte intera del numero richiesto sarà poi determinato dalla caratteristica (n.° 482).

Gli esempi seguenti chiariranno la regola.

1.° — *Trovare il numero corrispondente al logaritmo* 3, 2690457.

Si cerca questo logaritmo fra quelli dei numeri di quattro cifre, perchè la caratteristica è 3. — Trovasi, a pagina 21, che gli corrisponde il numero 1858*;* dunque

$$3,\ 2690457 = \log.\ 1858.$$

2.° — *Trovare il numero corrispondente al logaritmo* 3,4593600.

Cercasi questo logaritmo fra quelli dei numeri di quattro cifre, perchè la caratteristica è 3, e si trova essere compreso fra 3, 4592417 e 3, 4593925, i quali sono i logaritmi di 2879 e 2880; dunque il numero richiesto è uguale a 2879 più una frazione. — Per ottenere questa frazione si prende la differenza tavolaria 1508, e la differenza 1183 che esiste fra la mantissa del logaritmo dato e quella di 2879; poi si divide la seconda per la prima, e si ha:

1183 : 1508 = 0, 78. — Aggiungendo 0,78 a 2879, si ottiene 2879,78 pel numero cercato.

Ecco il tipo del calcolo:

Log. dato.	3, 4593600	
Log. di 2879	3, 4592417	
Differenza	11830	1508 differ. tav.
	12740	0,78 . . . .
Numero cercato 2879, 78.	676	
	. . .	

3.° — *Cerchisi il n.° corrispondente al logaritmo* 5,2690457.

Nelle tavole, fatta astrazione dalla caratteristica, trovasi corrispondere a questo logaritmo il numero 1858; ma la caratteristica avendo 5 unità, il numero richiesto dovrà avere sei cifre, e sarà per conseguenza 185800.

4.° — *Determinare il n.° corrispondente al logaritmo* 1,2690457.

Nelle tavole, fatta astrazione dalla caratteristica, questo logaritmo corrisponde al numero 1858; ma la caratteristica avendo una sola unità, il numero richiesto dovrà avere due sole cifre nella parte intera, e sarà per conseguenza 18, 58.

5.° — *Cercare il n.° corrispondente al logaritmo* 0,8678209.

Nelle tavole, a pagina 82, la mantissa di questo logaritmo appartiene al numero 7376; ma essendo *zero* la caratteristica, il numero richiesto dovrà avere una sola cifra nella parte intera, e sarà per conseguenza 7, 376.

489. 2.° Caso. — Regola. — *Se il logaritmo è negativo, si toglie la mantissa del dato logaritmo da* 1, *e si cerca il numero corrispondente alla differenza trovata; alla sinistra di esso si aggiungono tanti zeri, quante sono le unità della caratteristica del logaritmo proposto, e il numero che ne risulterà sarà la frazione decimale corrispondente al logaritmo dato.*

Esempio. — *Cercare la frazione corrispondente al logaritmo* — 2, 3257209.

Si sottrae la frazione 0,3257209 da 1, 0000000, e si ottiene 0, 6742791; alla mantissa 6742791 corrisponde il numero 4723; aggiungendo alla sua sinistra due zeri, si ha 004723; sarà questa la frazione cerrispondente al logaritmo dato, cioè

$$-2,\ 3257209 = \log.\ 0,\ 004723.$$

490. Quel poco che abbiamo detto sull' uso delle tavole dei logaritmi sarà sufficiente al giovane studioso per porsi in grado, mediante esercizio, di effettuare speditamente i calcoli più complicati dell' aritmetica, di cui ora deremo alcuni esempi.

APPLICAZIONE DE' LOGARITMI.

Esempi.

491. 1.° *Detreminare il valore d'* x *nella seguente esprcssione.*

$$x = \frac{7340 \times 3549}{681,8 \times 593,1}.$$

Prendendo i logaritmi si ha (n. 471; 476):

$$\log.\ x = \log.\ 7340 + \log.\ 3549 - (\log.\ 681,8 + \log.\ 593,1.)$$

Calcolo.

log. 7340	= 3,8656961	log. 681,8	= 2,8336570
log. 3549	= 3,5501060	log. 593,1	= 2,7731279
Somma	= 7,4158021	Somma	= 5,6067849

1.ª Somma: 7,4158021
2.ª Somma: 5,6067849

Differenza, o log. x = 1,8090172
Resultato: x = 64, 42.

492. 2.° *Calcolare il valore d' x nell' espressione*

$$x = 8.^{12}$$

Si ha: log. x = log. 8 $\times$ 12 (n.° 474).

CALCOLO.

$$\begin{array}{rl} \text{log. } 8 = & 0,\ 90308999 \\ \text{esponente} & \ldots\ldots\ 12 \\ \text{log. } 8 \times 12 = & 10{,}83707988 \end{array}$$

Resultato: $x = 68719475514.$

493. 3.° *Calcolare* $x = \sqrt[4]{4096}.$

Si ha (n.° 478):

$$\text{log. } x = \frac{\text{log. } 4096}{4}.$$

CALCOLO.

$$\text{log. } \frac{4096}{4} = 3,\ 61235996 \ \Big|\ \frac{4}{0,\ 90308999}$$

Quoziente: 0, 90308999

$$\text{log. } x = 0,\ 90308999.$$

Resultato: $x = 8.$

494. 4.° *Formare la* 15ª *potenza di* $\frac{3}{4}$.

Chiamando x il resultato che si cerca, avremo (n.° 475 e 487):

$$\text{log. } x = \text{log. } \left(\frac{3}{4}\right)^{15} = 15 \times \text{log. } \frac{3}{4} = 15 \times (\text{log. } 3 - \text{log. } 4).$$

CALCOLO.

$$\begin{array}{rl} \text{log. } 3 = & 0,\ 47712125 \\ \text{log. } 4 = & 0,\ 60205999 \\ \text{Differenza:} & -\ 0,\ 12493874 \times 15 \\ \text{Prodotto:} & -\ 1,\ 87408110 \ (\text{vedi n.° } 489) \end{array}$$

$$-\ 1,\ 87408110 = \text{log. } 0,\ 0133634.$$

Resultato: $x = 0,\ 0133634.$

495. 5.° — *Calcolare* $x = \sqrt[5]{371293}.$

Si ha (n.° 479):

$$\log. x = \log. \frac{371293}{5}$$

Calcolo.

$$\log. \frac{371293}{5} = 5,5697167 \quad | \; 5$$

Quoziente: 1, 1139433

$$\log. x = 1,\ 1139433$$

Resultato $\quad x = 13.$

Interesse composto.

496. Al numero 401 vedemmo in che consiste *l'interesse composto* e la regola che potevasi tenere per calcolarlo. — Ora ci proponiamo di trovare la formula generale per risolvere tutte le questioni relative all'interesse composto, applicando le proprietà dei logaritmi.

Sia C un capitale impiegato ad interesse composto alla tassa r per cento all'anno, si tratta di trovare ciò che diventa questo capitale dopo n anni.

Poichè 100 lire in un anno producono r d'interesse, C lire produrranno (vedi n.° 389) $\frac{C \times r}{100}$; per conseguenza il capitale C dopo un anno sarà divenuto

$$C + \frac{C \times r}{100} = C \times \left(1 + \frac{r}{100}\right).$$

È chiaro dunque che per calcolare il valore di un capitale, dopo essere stato impiegato un anno, bisogna moltiplicarlo per $1 + \frac{r}{100}$.

Per conseguenza, la somma $C \times \left(1 + \frac{r}{100}\right)$ alla fine del secondo anno diverrà

$$C \times \left(1 + \frac{r}{100}\right) \times \left(1 + \frac{r}{100}\right) = C \times \left(1 + \frac{r}{100}\right)^2.$$

Continuando a ragionare nello stesso modo, si vede che ogni anno il capitale si moltiplica pel fattore costante $1 + \frac{r}{100}$;

per conseguenza dopo n anni questo capitale sarà moltiplicato per $\left(1+\frac{r}{100}\right)^n$; in guisa che, chiamando C' il valore del capitale primitivo dopo n anni, si avrà l' uguaglianza, o formula:

$$(1) \ldots\ldots\ldots C' = C \times \left(1+\frac{r}{100}\right)^n.$$

Se n è frazionario, la formula dà ciò che diviene il capitale durante il maggior numero di anni; a questa somma allora si aggiunge l' interesse della frazione d' anno che resta.

497. Applicando i logaritmi alla formula trovata (1), essa diverrà (n. 472 e 485):

$$\log. C' = \log. C + n \times \log. \left(1+\frac{r}{100}\right) \ldots\ldots (2)$$

Esempio. — *Calcolare ciò che diventa il capitale L. 38000 impiegato ad interesse composto al 5 per 100 dopo 15 anni.*

Si ha $C = 38000$; $n = 15$; $r = 5$; quindi

$\log. C' = \log. 38000 + 15 \times \log. 1{,}05.$ (1)

Calcolo.

log. 38000 . . . . = 4,5797836
log. 1,05 = 0,0211893 × 15 = 0,3178395
log. C' . . . . = 4,8976231

4,8976231 = log. 78999,30.

Resultato: C' = Lire 78999, 30 c.

498. La formula data permette di risolvere il seguente problema:

In quanto tempo si raddoppia un capitale C *posto ad interesse composto a* r *per* 100?

Soluzione.

In questo caso si ha $C' = 2C$, e quindi la formula diviene:

$$2C = C \times \left(1+\frac{r}{100}\right)^n.$$

(1) $\log\left(1+\frac{r}{100}\right) = \log.\left(1+\frac{5}{100}\right) = \log.\frac{105}{100} = \log. 1{,}05.$

Dividendo per C da ambe le parti, si ha:

$$2 = \left(1 + \frac{r}{100}\right)^n;$$

e prendendo i logaritmi:

$$\log. 2 = n \times \log. \left(1 + \frac{r}{100}\right);$$

da cui, dividendo i due membri per $\log. \left(1 + \frac{r}{100}\right)$;

$$(3) \quad \ldots \ldots \quad n = \frac{\log. 2}{\log. \left(1 + \frac{r}{100}\right)}.$$

Esempio. — *In quanti anni si raddoppia un capitale di* 1200 *lire, impiegato ad interesse composto al* 5 *per* 100?

Si ha: $\log. 2 = 0{,}30103000$; $\log. 1{,}05 = 0{,}02118930$.

Quindi: $\dfrac{0{,}30103000}{0{,}02118930} =$ Anni 14, giorni 74.

499. Dalla formula (2) si ricavano le formule per trovare il *Capitale primitivo*, la *Tassa* e il *Tempo*.

Infatti, trattandosi di trovare il capitale C da porsi all'interesse composto per n anni alla tassa r per 100 onde ottenere il capitale C', nella formula (2)

$$\log. C' = \log. C + n \times \log. \left(1 + \frac{r}{100}\right)$$

l'incognita sarà C; quindi togliendo dai due membri di questa uguaglianza $n \times \log. \left(1 + \frac{r}{100}\right)$, si avrà la formula:

$$(4) \ldots \log. C = \log. C' - n \times \log. \left(1 + \frac{r}{100}\right).$$

Esempio. — *Si domanda qual capitale si dovrà impiegare all' interesse composto del* $5\frac{1}{2}$ *per* 100 *all' anno, perchè dopo* 19 *anni diventi uguale a lire* 45000.

Si ha: $C' = 45000$; $n = 19$; $1 + \frac{r}{100} = 1{,}055$.

Quindi: $\log. C = \log. 45000 - 19 \times \log. 1{,}055$.

CALCOLO.

$$\begin{array}{lr} \text{log. } 45000 \;\ldots\ldots\ldots = & 4,6532125 \\ \text{log. } 1,055 = 0,0232525 \times 19 = & 0,4437975 \\ \text{Differenza: } & 4,2094150 \end{array}$$

$$4,2094150 = \text{log. } 16196,\ 27 \text{ c.}$$

Resultato: $C =$ Lire 16196, 27 c.

500. Proponiamoci ora di trovare la formula per la Tassa.
Nella formula (2)

$$\text{log. } C' = \text{log. } C + n \times \text{log. } \left(1 + \frac{r}{100}\right)$$

l'incognita sarà $\quad \text{log. } \left(1 + \frac{r}{100}\right)$.

Quindi, togliendo log. C da ambi i membri, si ha:

$$\text{log. } C' - \text{log. } C = n \times \text{log. } \left(1 + \frac{r}{100}\right);$$

e dividendo per n:

$$(5) \ldots . \text{ log. } \left(1 + \frac{r}{100}\right) = \frac{\text{log. } C' - \text{log. } C}{n}.$$

Esempio. — *Si domanda a qual tassa siasi impiegato il capitale di* 8000 *lire all' interesse composto, sapendo che dopo* 12 *anni è divenuto di lire* 21293.

Si ha: $C' = 21293$; $C = 8000$; $n = 12$; quindi:

$$\text{log. } \left(1 + \frac{r}{100}\right) = \frac{\text{log. } 21293 - \text{log. } 8000}{12}.$$

CALCOLO.

$$\begin{array}{lr} \text{log. } 21293 \;\ldots\ldots\ldots = & 4,3282368 \\ \text{log. } 8000 \;\ldots\ldots\ldots = & 3,9030900 \\ \text{Differenza: } & 0,4251468 \end{array}$$

$$\frac{0,4251468}{12} = 0,0354289 \text{ Quoziente.}$$

$0,0354289 = \text{log. } 1,085$; e per conseguenza:

Resultato: $r =$ Lire 8,50 Tassa.

501. Resta ora da trovare la formula per calcolare il tempo.

Nella formula (2)

$$\log. C' = \log. C + n \times \log. \left(1 + \frac{r}{100}\right)$$

l' incognita sarà n.

Perciò togliendo dai due membri log. C, si ha:

$$\log. C' - \log. C = n \times \log. \left(1 + \frac{r}{100}\right);$$

e dividendo per $\log. \left(1 + \frac{r}{100}\right)$ da ambe le parti:

$$(6) \ldots\ldots n = \frac{\log. C' - \log. C}{\log. \left(1 + \frac{r}{100}\right)}.$$

Esempio. — *In quanto tempo L. 7580, impiegate all' interesse composto alla tassa del* 3,50 *per* 100, *daranno un frutto di L.* 824, 09 ?

Si ha: $C' = 7580 + 824{,}09 + 8404{,}09;$

$C = 7580;\ r = 3,\ 50;$ quindi:

$$n = \frac{\log. 8404{,}09 - \log. 7580}{\log. 1{,}035}.$$

CALCOLO.

log. 8404, 09 . . . . . . = 3,9244906
log. 7580 . . . . = 3,8796692
Differenza : 0,0448214
log. 1,035 . . . . = 0,0149404

$$\frac{0{,}0448214}{0{,}0149404} = 3 \text{ anni.}$$

Resultato: $n = 3$ anni.

Sconto composto.

502. I problemi di *sconto composto* si risolvono tutti per mezzo della formula (2) n.° 497.

$$\log. C' = \log. C + n \times \log. \left(1 + \frac{r}{100}\right).$$

Infatti, se in essa C rappresenta il capitale da impiegarsi oggi ad interesse composto alla tassa r per 100 per avere dopo

n anni il capitale C', rappresenterà parimente il capitale, con cui oggi si pagherebbe un debito C', pagabile soltanto dopo n anni, ritenendo l' interesse composto alla medesima tassa. — Le formule (2) (4) (5) (6) permetteranno dunque di risolvere i quattro problemi seguenti, nella soluzione dei quali, per brevità, abbiamo omesso i calcoli.

503. Problema 1.° — *Calcolando la tassa di sconto composto al* 5 *per* 100, *si pagò un debito* 4 *anni avanti la scadenza con* *L.* 8460. — *Si domanda qual fosse questo debito.*

Questo problema è identico a quello del numero 497 ; perciò risolvendolo colla formula (2), avremo:

$$\log. C' = \log. 8460 + 4 \times \log. 1{,}05.$$

Trovati i logaritmi, si ottiene :

$$\begin{aligned} \log. C' &= 3{,}9273704 + 4 \times 0{,}0211893 \\ &= 3{,}9273704 + 0{,}0847572 \\ &= 4{,}0121276. \end{aligned}$$

Quindi: 4, 0121276 = log. 10283, 18.

Resultato : Debito : Lire 10283, 18 c.

Problema 2.° — *Si dovrebbe pagare un debito di L.* 1000 *fra* 5 *mesi ; pagandolo oggi quanto di meno si sborserà, se si calcola lo sconto composto al* 5 *per* 100 *al mese ?*

Per risolvere il problema, ci varremo della formula (4), giacchè si tratta di trovare una somma che, posta ad interesse composto del 5 per 100 *al mese,* diventi dopo 5 mesi uguale a L. 1000.

Avremo dunque :

$$\log. C = \log. 1000 - 5 \times \log. 1{,}05.$$

Trovati i logaritmi, si vedrà che

$$\begin{aligned} \log. C &= 3{,}0000000 - 5 \times 0{,}0211893 \\ &= 3{,}0000000 - 0{,}1059465 \\ &= 2{,}8940535. \end{aligned}$$

Quindi: 2,8940535 = log. 783,60.

Resultato : 1000 — 783,60 = L. 216,40 c.

Problema 3.° — *Un debito di L.* 8404 *si pagò anticipatamente con L.* 7580 *calcolandosi lo sconto composto del* 3, 50 *per* 100. *Si domanda a qual' epoca scadeva.*

Facendo uso della formula (6), si ha:

$$n = \frac{\log.\ 8404 - \log.\ 7580}{\log.\ 1{,}035}.$$

Calcolati i logaritmi, avremo:

$$n = \frac{3{,}9244860 - 3{,}8796692}{0{,}\ 0149404}$$

$$= \frac{0{,}0448168}{0{,}0149404} = 3 \text{ circa.}$$

Resultato: Anni 3 circa.

PROBLEMA 4.° — *Una somma di L.* 8249, 88 *si pagò* 6 *anni avanti la scadenza con L.* 6520*; si domanda a qual tassa si calcolò lo sconto composto.*

La formula (5) risolve il problema. Si ha:

$$\log.\left(1 + \frac{r}{100}\right) = \frac{\log.\ 8249{,}88 - \log.\ 6520}{6}.$$

Sostituendo ai numeri i logaritmi:

$$\log.\left(1 + \frac{r}{100}\right) = \frac{3{,}9164476 - 3{,}8142476}{6}$$

$$= \frac{0{,}1022000}{6} = 0{,}0170333.$$

Dunque $0{,}017333 = \log.\ 1{,}04$; e per conseguenza:

Resultato: Tassa: L. 4.

ESERCIZI E PROBLEMI

sull' applicazione dei logaritmi.

346. Verificare le seguenti uguaglianze:

$$1{,}0742664 = \log.\ 11{,}86496 \ldots$$

$$3{,}5947835 = \log.\ 3933{,}538 \ldots$$

$$0{,}7813427 = \log.\ 6{,}044253 \ldots$$

$$6{,}1785400 = \log.\ 1508481{,}764 \ldots$$

347. Trovare per mezzo dei logaritmi il valore d' x nell' espressione:

$$x = \frac{314916 \times 385}{652 \times 217}.$$

R. — $x = 856,\ 935 \ldots$

348. Calcolare la *ottava potenza* di 6.

R. — $6^8 = 1679616$.

349. Calcolare $\sqrt[7]{8}$.

R. — Radice : 1,345900 .....

350. Calcolare $\sqrt[4]{35246}$.

R. — Radice : 13,70179 ....

351. Calcolare $\sqrt[9]{475894359132}$.

R. — Radice : 19, 83815 ....

352. Calcolare $\sqrt[5]{873215400}$.

R. — Radice : 61,4078 ......

353. Fu impiegato un capiltale all' interesse composto del 5 per 100, e dopo 5 anni si ricevettero L. 15315,37 fra capitale ed interessi ; si domanda qual fosse il capitale primitivo.

R. — Lire 11999,98 .....

354. Un tale ha un figlio dell'età di 8 anni ; vuol procuragli un capitale di L. 30000 per quando avrà 20 anni. — Qual somma dovrà egli porre oggi ad interesse composto al 5 per 100, per potere ritrarre a quell' epoca la detta somma ?

R. — L. 16705,12 .....

355. Qual somma si dovrà riscuotere dopo 9 anni per un capitale di L. 385,50, impiegato ad interesse composto del 5,75 per 100?

R. — Lire 637,59 ....

356. Un capitale di L. 385,50, impiegato al $5\frac{3}{4}$ per 100 è salito a L. 637,59; per quanto tempo è rimasto impiegato ?

R. — Anni 9.

357. Lire 124, 23 di debito si sono pagate oggi con L. 100 ; domandasi qual' era l' epoca del pagamento, sapendo che fu calcolato lo sconto composto del $7\frac{1}{2}$ per cento.

R. — Anni 3.

358. Una somma di L. 34000, pagabile fra 3 anni, con quanto si pagherebbe oggi, calcolando lo sconto composto del 5 per 100 ?

R. — Lire 29370,48 ...

359. Un debito, pagabile fra 4 anni, si è pagato oggi con L. 7040, calcolando lo sconto composto al 4 per 100. — Domandasi qual fosse questo debito.

R. — Lire 8235,90 ...

PROBLEMI

di Recapitolazione generale.

---

360. Si domanda qual è il numero di cui $\frac{7}{8}$, diminuiti di $\frac{2}{3}$, e aumentati di $\frac{3}{4}$, dànno 368.

R. — Il numero cercato è 384.

361. Trovare un numero di cui la metà, i $\frac{2}{3}$, i $\frac{3}{4}$ e i $\frac{4}{5}$ riuniti, e aumentati di 45, dànno per somma 534.

R. — Il numero richiesto è 180.

362. Decomporre il numero 800 in tre porzioni in modo, che la prima stia alla seconda come 3 : 2, e la seconda alla terza come 4 : 5 (1).

R. — Prima porzione 320; seconda $213\frac{1}{3}$; terza $266\frac{2}{3}$.

363. La differenza di due numeri è 7, e il quadrato del più grande sorpassa di 539 il quadrato del più piccolo. — Trovare questi due numeri.

R. — I numeri cercati sono 35 e 42.

364. Si domanda quanti centimetri cubi sono in una verga d'oro del valore di L. 19754, sapendo che 1 decimetro cubo d'oro pesa 19 chilogr., 26 e che il chilogr. d'oro vale L. 3100.

R. — Centimetri cubi 33 circa.

365. Un tale aggiungendo alla somma che ha ritirato dalla vendita di 356 botti di vino l'ottavo di questa somma, meno L. 278, compra una casa che gli costa L. 50986. — Si domanda quanto abbia venduto la botte del vino.

R. — Lire 128.

(1) Chiamando x, y, z le tre porzioni, e facendo $x = 1$, si avrà

$$1 : y :: 3 : 2; \quad \text{da cui } y = \frac{2}{3},$$

$$\text{quindi } \frac{2}{3} : z :: 4 : 5; \quad \text{da cui } z = \frac{5}{6};$$

dunque il numero 800 deve dividersi proporzionalmente ai numeri $1, \frac{2}{3}, \frac{5}{6}$, ovvero ai numeri 6, 4, 5, ec.

366. Un legato di L. 2850 deve repartirsi fra i tre eredi A, B, C, in modo, che la parte di A stia a quella di B come 6 : 11, e che C riceva L. 300 più di A e B insieme. — Quanto avrà ciascun erede?

R. — A avrà L. 450 ; B L. 825 ; C L. 1575.

367. Una persona impiega al 5 per 100 l'anno un capitale di L. 600, al quale aggiunge ogni anno una somma uguale, e accumula con tutte queste somme i loro interessi composti. — Si domanda il valore della somma che dovrà ritirare dopo 4 anni.

R. — Lire 2715, 38.

368. Un tale ha saldato un certo debito in 20 mesi, pagando un acconto mensile ; il primo è stato di lire 29, l'ultimo di lire 86, ed ogni acconto ha superato il precedente della stessa quantità — Si domanda qual sia stato l'aumento mensile.

R. — Lire 3.

369. Due corrieri sono partiti da un medesimo luogo, ma il secondo è partito 10 giorni dopo il primo ; questo percorse giornamente 4 Chilom., e l'altro 9 Chilom. — Domandasi quanti giorni saranno necessari perchè il secondo raggiunga il primo.

R. — Giorni 8.

370. Una botte di vino ha tre orifizi ; lasciando aperto il primo se ne estrae tutto il vino in 2 ore, il secondo in 3 ore, il terzo in 4 ore. — Quanto tempo occorrerà per estrarre tutto il vino, aprendo insieme i tre orifizi?

R. — In $\frac{12}{13}$ d'ora, ovvero in minuti $55 + \frac{5}{13}$.

371. Un padre morì lasciando alla moglie, al figlio e alla figlia la somma complessiva di L. 5400, disponendo che la parte della figlia stesse a quella della madre come 4 a 5, e che il figlio avesse tanto quanto la madre e la figlia insieme. — Quale fu la parte di ciascuno?

R. — Della madre : lire 1500 ; della figlia : lire 1200 ; del figlio : L. 2700.

372 Un recipiente, della capacità di metri cubi $755 e \frac{1}{4}$ d'acqua, deve empirsi mediante tre tubi. Il primo dà 12 metri cubi d'acqua in giorni $3 e \frac{1}{4}$, il secondo ne dà $15 e \frac{1}{3}$ in giorni $2 e \frac{1}{2}$, il terzo ne dà 17 in giorrni 3. — In quanto tempo sarà empito il recipiente, sgorgando l'acqua dai tre tubi contemporaneamente?

R. — In giorni $48 + \frac{3}{4}$.

373. Fu domandato ad una persona quanto denaro aveva nella sua borsa ; essa rispose che aveva un numero tale di napoleoni, che l'eccesso di questo nu-

mero su 7 era uguale all'eccesso del quadruplo di questo numero su 52. — Trovare il numero dei napoleoni (1).

R. — Il numaro cercato è 15.

374. Tre muratori devono inalzare un muro. Il primo fa in 5 giorni 8 metri cubi di lavoro, il secondo in 4 giorni ne fa 9 metri cubi, e il terzo 10 metri cubi in 6 giorni. — Quanto tempo occorrerà per fabbricare il muro, se esso dev' essere di 756 metri cubi, lavorando i tre muratori insieme?

R. — Giorni $137 + \frac{13}{331}$.

375. Per una guerra imminente le tre città *A*, *B*, *C* devono dare un contingente di 594 uomini: ed il numero spettante a ciascuna città dev' essere proporzionale alla sua popolaziane. — Ora, se la popolazione di *A* sta a quella di *B* come 3 : 5; e se la popolazione di *B* sta a quella di *C* come 8 : 7 : domandasi quanti uomini deve dare ciascuna città (2).

R. — *A* uomini 144; *B*, 240; *C*, 210.

376. Due corrieri vanno nello stesso senso: il primo precede il secondo di 138 chilom., fa 3 chilom. in 4 ore, e parte 40 ore avanti il secondo, il quale percorre 6 chilom. in 7 ore. — Dopo quanto tempo i corrieri s' incontreranno, e quali saranno allora le distanze respettive dai punti di partenza al punto d' incontro?

R. — S' incontreranno dopo 1568 ore. — La distanza percorsa dal primo sarà di 1206 Chilom.; quella del secondo, di 1344 chilom.

377. Una macchina a vapore ha consumato in 103 giorni di lavoro 851900 chilogr. di carbone; un perfezionamento fatto alla costruzione permette, ottenendo la stessa forza, di non bruciarne che 2860 chilogr. in 37 ore. — Trovare l' economia annua di carbone dovuto a questo perfezionamento, supponendo 330 giorni di lavoro per anno, 24 ore per giorno, e il prezzo del carbone a lire 3,75 i 100 chilogr.

R. — Lire 79394,76 . . . . .

378. Una vedova, secondo il testamento di suo marito, ha da dividere coi suoi due figli e colle sne tre figlie una somma di lire 22500 in modo, che ciascun figlio riceva il doppio di ogni figlia, e che essa vedova abbia da ricevere L. 1500 più di quello che ricevono tutti insieme i suoi figli e le sue figlie. — Qual somma riceverà la vedova, e quanto ciascun figlio e ciascuna figlia?

R. — La vedova riceverà L. 12000; ciascun figlio Lire 3000; ciascuna figlia L. 1500.

379. Da un vaso contenente 25 litri di vino si sono tolti 5 litri e vi si è messa altrettanta acqua; si sono poi tolti 5 litri di questa miscolanza, e si è riempito il vaso con altrettanta acqua; finalmente si sono tolti altri 5 litri di questa misco

(1) $(4x . 52 : x . 7)$
(2) Vedi il Probl. 362.

lanza, e si è posta nel vaso altrettanta acqua. — Domandasi quanti litri di vino e d'acqua si sono tolti in tutto, e quanto vino contiene ancora il vaso.

R. — In tutto si sono tolti 12 lit., 2 di vino e 2 lit., 8 d'acqua; restano nel vaso 12 lit., 8 di vino.

380. Un bacino è alimentato da due fontane. La prima, versando sola, lo empirebbe in 2 ore, e la seconda in 3 ore. Di più, la totalità dell'acqua che esso può contenere uscirebbe in un'ora e mezzo da una apertura praticata in questo bacino. — Essendo il bacino vuoto, in quanto tempo verrebbe empito se le fontane versassero insieme, e se l'acqua uscisse contemporaneamente dall'apertura?

R. — Ore 6.

381. Tre persone hanno fatto società; la prima ha posto L 600, e 4 mesi dopo ha aggiunto L. 400; la seconda ha posto L. 900, e 5 mesi dopo ha ritirato L 300; la terza ha posto L 800, 3 mesi dopo ha ritirato L. 200, e 2 mesi dopo aver ritirato le L. 200, ha aggiunto al capitale rimasto L. 300. La società ha durato 10 mesi; il guadagno è stato di L. 4500 — Trovare la parte di guadagno di ciascun socio.

R. — Parte del 1° : lire 1575; del 2°: lire 1406,25; del 3°: lire 1518,75.

382. Un padre che ha quattro figli dichiara nel suo testamento che il suo patrimonio sia diviso fra loro nel modo seguente: il primo deve avere lire 20000, più il quarto di ciò che resterà; il secondo, lire 15000, più il terzo di ciò che resterà dopo aver prelevato la parte del primo e le lire 15000; il terzo, lire 25000, più il quinto di ciò che resterà dopo aver prelevato le due prime parti e le lire 25000; e finalmente il quarto, lire 60000 che resteranno dopo avere effettuato i primi tre pagamenti. — Si domanda qual è il patrimonio del padre, e quali, saranno le parti respettive dei primi figli.

R. — Patrimonio: lire 240000; parte del 1° figlio: lire 75000; del 2°: lire 65000; del 3°: lire 40000.

383. Un Signore disse nel suo testamento: Mio fratello *A* riceva la terza parte dell'intera eredità, mio fratello *B* la quarta parte del rimanente, mio nipote *C* la quinta parte del resto, e il sesto dell'avanzo sia dato al mio amico *D*. Ciò che resta poi si somministri alle 5 scuole della mia città natia, di modo, che la scuola *E* riceva lire 1000, la scuola *F* lire 240 più della prima, e così che ogni scuola seguente riceva lire 240 più della precedente; rimanendo ancora in tal guisa lire 440 da distribuirsi ai poverelli. — Cerchisi quale sia l'intera eredità, e quanto spetti a ciascuno degli eredi.

R. — L'intera eredità fu di lire 23520; *A* ricevette lire 7840; *B* lire 3920; *C* lire 2352; *D* lire 1568; la scuola *E* lire 1000; la scuola *F* lire 1240; la scuola *G* lire 1480; la *H* lire 1720; la *I* lire 1960.

384. In una biblioteca vengono impiegate due compagnie di scrittori a copiare diversi manoscritti.

La prima compagnia è composta di 24 persone, che lavorando 8 ore per

giorno, copiano in 90 giorni 8 esemplari di un'opera in 6 volumi, ognuno dei quali contiene 480 pagine, ogni pagina 54 righe, ed ogni riga 56 lettere. — La seconda compagnia si compone di 30 scrittori, che lavorano 6 ore per notte. — In quante notti copieranno essi 9 esemplari di un' opera in 4 volumi, contando ognuno 800 pagine, ogni pagina 84 righe, ed ogni riga 80 lettere, sapendo: 1.° che la velocità de' primi scrittori sta a quella dei secondi come 4 sta a 5; 2.° che per vergare 7 righe sulla carta dei primi occorre il medesimo tempo che per scriverne 6 sulla carta dei secondi; 3.° che se di giorno si scrivono 6 righe, di notte non se ne possono scrivere che 5; 4.° che i manoscritti della seconda compagnia sono più difficili a leggersi di quelli della prima, e che le difficoltà stanno come 7 a 8.

R — Notti $841 + \frac{1}{3}$, o 2 ore.

835 Un ingegnere ricevette l' incarico di fare scavare due canali *A* e *B*. Il primo *A* doveva essere lungo 800 metri, largo $2\frac{1}{2}$ e profondo $\frac{5}{6}$; l' altro *B* doveva esser lungo 875 metri, largo 3 e profondo $1\frac{1}{6}$.

L' ingegnere fece cominciare contemporaneamente lo scavo d'ambedue i canali da 88 operai, e in tal guisa il canale *A* venne terminato in 4 settimane, lavorandovi settimanalmente 6 giorni per 10 ore al giorno; il canale *B* fu terminato in 6 settimane, perchè vi si lavorava soltanto 5 giorni della settimana per 14 ore al giorno. — Ogni metro di lunghezza del canale *A* venne a costare lire 5,76, e ciascun metro del canale *B*, lire 9,216. — Quanti operai erano perciò impiegati in ciascun canale? — Qual' era la paga giornaliera di ogni operaio della prima sezione? — Quale quella di ciascuno della seconda? — A quanto ammontarono le spese di questi due canali, se l' ingegnere ricevette il 5 per 100 della intera mercede data agli operai, se il trasporto della terra scavata costò lire 3780, e finalmente se pel logorarsi degli attrezzi adoperati nello scavo furono sborsate lire 1020?

R. — Nel canale *A* furono impiegati 40 operai; nel canale *B*, 48. — La paga giornaliera d' ogni operaio del canale *A* fu di lire 1,80; quella di ciascuno del canale *B*, lire 2,40. — L' ingegnere ebbe lire 259. — La spesa totale dei due canali ammontò a lire 10243,20.

TAVOLE

DI MISURE NON METRICHE GIÀ USATE IN ITALIA E FUORI, E LORO RAGGUAGLIO COLLE MISURE METRICHE.

Misure lineari (1)

	METRI
ACQUI, *Trabucco*: (6 piedi, 12 once, 12 punti, 12 atomi)	3,006000.
ALESSANDRIA (Piemonte), *Trabucco*: (diviso come sopra	2,861370.
AMBURGO, *Piede*: (3 palmi, 4 pollici) . . .	0,286415.
AMSTERDAM, *Pertica*: (13 piedi, 3 palmi, 11 pollici)	3,680729.
AOSTA, *Auna*: (divisa in mezzi, terzi ec.) . .	0,827000.
Tesa: (6 piedi, 12 pollici, 12 linee) . . .	1,872000.
AUGUSTA, *Piede*: (12 pollici, 12 linee) . . .	0,296168.
BERGAMO, *Braccio* mercantile: (12 once). . .	0,659319.
Braccio di fabbrica: (12 once)	0,531414.
Piede: (12 once; e 6 piedi = trabucco). .	0,437767.
BERLINO, *Piede* del Reno: (12 poll. 12 lin.) . .	0,313854.
BOLOGNA, *Braccio*: (12 once)	0,640039.
Piede da legname: (12 once)	0,380098.
BRESCIA, *Braccio* da panno: (12 once) . . .	0,674124.
Braccio da seta e da tela (12 once). . .	0,640383.
Piede, (12 once)	0,475467.
CAGLIARI, *Trabucco o canna*: (12 palmi, 4 quarte)	3,148200.
Misure tollerate: *canna* = 3 met., e *palmo* = 0*m*, 25	

(1) Ciò che è scritto fra parentesi dopo l' unità di misura indica le divisioni e suddivisioni della misura stessa. — Così (6 piedi, 12 once, 12 punti, 12 atomi) indica che il piede si divide in 12 once, l' oncia in 12 punti, ec.

	Metri
Carrara, *Canna* per legname: (12 once) . .	0,624545.
Braccio mercantile: (12 once)	0,619725.
Palmo pe' marmi: (12 once)	0,249267.
Braccio di fabbrica:)12 once) . . .	0,293337.
Cesena, *Braccio* da tela: (12 once) . . .	0,702356.
Piede da legname: (12 once)	0,538473.
Casale, *Trabucco* di Monferrato: (6 piedi, 12 once, 12 punti, 12 atomi)	2,904126.
Tesa di Monferrato: (5 piedi, 8 once) . .	1,675000.
Braccio lungo da panno: (diviso in mezzi, terzi ec.)	0,670000.
Braccio lungo da seta	0,526000.
Ciambery e Savoja, *Piede* di Savoia: (12 pollici, 12 linee)	0,339370.
Auna di mercante, o antica di Ginevra . .	1,142000.
Auna metrica	1,200000.
Auna di Tisserand	1,268000.
Colonia, *Piede*: (12 pollici, 12 linee) . . .	0,287393.
Costantinopoli, *Pic grande, halebi.* o *arhim* . .	0,677877.
Pic corto	0,574109.
Cracovia, *Piede*	0,356421.
Crema, *Braccio*: (12 once)	0,670164.
Piede da legname: (12 once)	0,4469786.
Dresda, *Piede*: (12 pollici, 12 linee) . . .	0,283260.
Ferrara, *Braccio* da panno: (12 once) . . .	0,673607.
Braccio da seta: (12 once)	0,634358.
Piede da legname: (12 once)	0,403854.
Firenze e Toscana, *Braccio:* (20 soldi, 3 quattrini, 4 denari)	0,583626.
Canna = 5 braccia; crazia = 5 quattrini; *Miglio* = 2833 braccia e un terzo . . .	1653,607.
Forlì, *Braccio* da panno e da seta: (12 once) .	0,621963.
Braccio da tela nostrale: (12 once) . . .	0,737301.
Piede da legname: (12 once)	0,488206.
Francoforte sul meno, *Piede*: (12 once) . .	0,284610.
Genova, *Cannella*: (12 palmi, 12 once, 12 punti, 12 atomi)	2,977000.
Canna per le stoffe, (10 palmi) . . .	2,480833.
Grecia Antica, sistema olimpico (Attica, Poloponneso, Sicilia, Magna Grecia).	

	METRI
Piede greco ant. di 600 allo stadio olimpico .	0,308604.
Palmo minor (doron o paleste) = 0,25 di piede; palmo *major* (epitame) = 0,75 di piede;. .	0,019291.
Cubito (pecus, sive olene) = 1,5 piedi.	
Dito (dactilos)	0,019291.
Sistema phytico o delphico (Tessaglia, Illiria. Tracia, Marsiglia, Macedonia, Sicilia) *Piede* phytico di 600 allo stadio phytico	0,247650.
Palmo = 0,25 di piede; dito = 0,25 di palmo; cubito = 1,5 piedi.	
Piede di Macedonia	0,353500.
Piede di Archimede di 600 allo stadio di Clemone . . , ...	0,222222.
IMOLA, *Braccio*: (12 once)	0,639350.
Piede da legname: (10 once)	0,439661.
INTRA, *Braccio* da panno: (12 once) . . .	0,667410.
Braccio da seta: (12 once)	0,525475.
LIPSIA, *Piede*: (12 once, 12 linee)	0,282656.
LISBONA, *Palmo* di Craveira; (8 pollici) . .	0,218590.
Piede di Craveira: (12 pollici) . . .	0,327800.
Braça = 10 palmi; vara = 5 palmi.	
LONDRA, *Piede*: (12 pollici, 12 linee) . .	0,304794.
Yard = 3 piedi; tesa o fathom = 6 piedi; rod o pole = 5 yards e mezzo; furlong = 40 poles.	
Miglio = 8 furlongs = 1760 yards . .	1609,315.
Lega = 3 miglia.	
MADRID, *Estadale*: (2 estado, 6 piedi) . . .	3,344632.
Passo = 5 piedi; gran palmo = $1\frac{1}{3}$ piede;	
Lega = 20000 piedi	5574.
MANTOVA, *Braccio*: (12 once)	0,637973.
Piede da legname: (12 once)	0,466860.
MASSA DI CARRARA, *Braccio*: (12 once) . . .	0,592871.
Piede da legname: (12 once)	0,495780.
MILANO, *braccio*: (12 once).	0,594936.
Trabucco: (6 piedi, 12 once, 12 punti, 12 at.)	2,611110.
MIRANDOLA, *braccio* da stoffa: (12 once). . .	0,638490.
Braccio da legname: (12 once). . . .	0,531931.
MODENA, *braccio* da stoffa: (12 once) . . .	0,633153.

	METRI
Braccio da legname: (12 once)	0,523048.
MONACO DI BAVIERA, *Ruthe* o pertica: (10 piedi, 12 pollici, 12 linee, 12 punti) . . .	2,918590.
NAPOLI, prima del 1840, Palmo : (12 once, 5 minuti)	0,263670.
Canna = 8 palmi.	
Dopo il 1840, Palmo	0,264550.
Canna = 10 palmi.	
Miglio = 7000 palmi	1851,852.
NIZZA marittima, *Trabucco*: (12 palmi, 12 pollici)	3,144000.
Canna = 8 palmi.	
Auna antica di Francia	1,188400.
Auna metrica	1,200000.
NIZZA MONFERRATO, *Trabucco*: (6 piedi, 12 once, 12 punti, 12 atomi).	2,916692.
NOVARA, *trabucco*: (6 piedi, 12 once, 12 punti) .	2,825680.
ONEGLIA, *canna*: (12 palmi, 12 once, 12 linee, 12 punti)	2,988000.
OSSOLA, *Spazzo*: (8 ottavi, 5 once)	1,983120.
PALERMO E SICILIA, misure vecchie:	
Palmo	0,258098.
Miglio = 5760 palmi	1486,643.
Dopo il 1840 come a Napoli.	
PARIGI, *Tesa*: (6 piedi, 12 poll. 12 lin. 12 punti) .	1,949037.
Lega di 4 chilometri	4000.
Lega marina di 20 al grado	5556.
Lega di posta di 2000 tese	3898.
PARMA, *Braccio* da panno e tela	0,639500.
Braccio da seta	0,587750.
Pertica: (6 braccia, 12 once, 12 pun. 12 at) .	3,271000.
PAVIA, *Trabucco*: (6 piedi, 12 m., 12 pun., 12 at.)	2,831724.
Braccio = 16 once	0,629272.
PECHINO, *Piede* matematico legale	0,333100.
Piede o Congbu de' costruttori. . . .	0,322800.
Piede degl'ingegneri	0,329600.
Li	577.
PIACENZA, *braccio* da stoffe	0,675000.
Canna: (2 trabucchi, 6 braccia da muro, 12 once, 12 pun., 12 at).	5,634783.

	Metri
Pietroburgo, *Sacken* o tesa: 3 braccia o archines, 16 palmi o werschocks	2,133561.
Werst = 500 sacken	1067.
Pontremoli, *braccio* da panno: (8 ottavi) . .	0,692000.
Braccio da muratore: (12 once) . . .	0,551000.
Ravenna, *braccio* mercantile: (12 once). . . .	0,643138.
Braccio da legname: (12 once). . . .	0,347563.
Piede da fabbrica: (10 once)	0,584608.
Reggio Emilia, *braccio* merc: (12 once) . .	0,641072.
Braccio da legname: (12 once) . . .	0,530898.
Reno (piede del) Vedi Berlino	
Rimini, *Braccio* mercant: (10 once) . . .	0,631432.
Piede da legname: (10 once)	0,542948.
Roma, *palmo*: (12 once, 5 minuti)	0,223122.
Canna = 10 palmi; staiolo = 5, 75 palmi.	
Piede = $\frac{4}{3}$ di palmo	0,297896.
Passo = 5 piedi.	
Miglio = 1000 passi	1489,48.
Rovigo, *braccio* da panno: (12 once) . . .	0,669820.
Braccio da seta: (12 once)	0,632809.
Piede: 12 once)	0,384230.
Sassari, *Canna*: (10 palmi)	2,623500.
Savona, *Cannella*: (12 palmi, 12 once). . .	3,000000.
Sondrio, *braccio* da panno: (12 once) . . .	0,671714.
Braccio da seta: (12 once)	0,530554.
Piede: (12 once)	0,446202.
Stocolma, *Pertica*: (16 piedi, 12 poll., 12 lin.) .	4,750416.
Torino, avanti il 1818. Trabucco: (6 piedi, 12 once, 12 punti, 12 atomi)	3,082596.
Raso: = 14 once	0,599394.
Tesa: (5 piedi manuali, 8 once, 12 punti, 12 atomi)	1,712553.
Piede legale di 10 once e 10 punti del piede, ora fuori di uso	0,463817.
Miglio = 800 trabucchi	2466,077.

Dopo il 1818.

Trabucco: (6 piedi, 12 once, 12 punti, 12 at.)	3,086420.
Raso = 14 once	0,600137.

	Metri
Tesa: (5 piedi manuali, 8 once ec.)	1,714678.
Piede legale di 10 once e 10 punti . .	0,464392.
Miglio = 800 trabucchi	2469,136.
Tortona, *Trabucco*: (6 piedi, 12 once) . . .	2,853000.
Valcamonica, *braccio* da panno: (12 once) . .	0,682559.
Varallo, *braccio* lungo	0,682000.
Braccio corto	0,350000.
Varsavia, *Piede*	0,283000.
Venezia, *Piede*: (12 once, 12 pun. 12 at.) . .	0,347735.
Passo = 5 piedi; pertica piccola = 4, 5 piedi; Pertica grande = 6 piedi.	
Verona, *braccio* lungo: (12 once)	0,648991.
Braccio corto: (12 once)	0,642449.
Piede: (12 once)	0,342915.
Vienna, *braccio* (elle): (12 once)	0,779213.
Klafter: (6 piedi, 12 once)	1,896666.
Miglio	7586.
Vigevano, *Braccio* da panno: (12 once) . . .	0,668099.
Braccio da seta: (12 once)	0,528144.
Braccio da legname: (12 once)	0,599068.
Piede: (12 once)	0,462381.

Misure agrarie.

	Are
Acqui, *Tavola* = 4 trabucchi quadr.	0,361441.
Stara = 28 tavole.	
Alessandria, Piemonte, *Tavola*: (12 piedi, 12 once, 12 punti, 12 atomi	0,327498.
Staio piccolo = 12 tavole; staio grande = 18 tavole; moggio = 8 staia.	
Amburgo, *Scheffel*	41,98.
Morgen di 600 marschruthen quadr. . .	96,472.
Morgen di 200 gesruthen quadr. . . .	82,58.
Amsterdam, *Morgen* di 600 pertiche quadr. . .	81,2865.
Aosta, *Sétur*: (8 quartanées, 100 sese quadr.) .	28,035072.
Aquila degli Abruzzi, Coppa.	6,17973.
Avellino, *Moggio*	40,04465.

	Are
Bergamo, *Pertica* : (24 tavole)	6,623082.
Berlino, *Morgen* grande: (400 ruthen quadr.) .	55,256.
Morgen piccolo: (180 ruthen quadr.) . .	25,532.
Bologna, *Tornatura*: (144 tavole).	20,804358.
Brescia, *Piò*: (100 tavole)	32,553938.
Cagliari, *Starello* : (16 imbuti)	39,86750.
Campobasso, *Tomolo*	23,36691.
Carrara, *Quartiere*: (100 tavole)	12,390686.
Casale, *Moggio* : (8 staia, 12 tav., 12 piedi) .	32,386366.
Catanzaro, *Tomolata*	27,80878.
Cesena, *Tornatura* (100 tavole)	28,995272.
Chieti, *Salma*	97,30850.
Tomolo	32,43611.
Ciambery, *Journal* : (400 tese quad.)	29,4838.
Colonia, *Morgen* = 150 pertiche quad. . .	31,71626.
Cosenza, *Moggio* . . . . , ...	40,04465.
Crema, *Pertica* : (24 tavole)	7,627364.
Dresda, *Morgen* di 300 pert. quadr.	55,3697.
Ferrara, *Biolca* : (400 pertiche)	65,239360.
Staro: (66 pertiche e due terzi)	10,873227.
Firenze, *Quadrato*: (10 tavole, 10 pertiche, 10 deche, 10 braccia quadr.)	34,061912.
Foggia, *Tomolo* : (3 pezze, 3 catene)	30,65930.
Verzura = 4 tomoli; *carro* = 20 verzure.	
Forlì, *Tornatura* : (100 tavole).	23,834505.
Francoforte sul Meno, *Morgen* di 160 pertiche quadrate	20,2506.
Genova, *Cannella* quadrata : (12 palmi superficiali, 12 once superf.)	0,088625.
Grecia antica, *Stadio* quad. (36 pletri 10000 piedi quadr.	342,94.
Imola, *Tornatura*: (100 tavole)	19,330161.
Lecce, *Tomolo*.	62,56976.
Londra, *Rood*: (40poles o pertiche quad. 272 piedi e un quarto quadr	10,116775.
Acre = 4 roods; hide of land = 100 acres.	
Madrid, *Yugada* : (50 fanegadas)	3219,7815.
Arançada	44,7192.
Mantova, *Biolca*: (100 tavole).	31,385969.

	Are
Massa di Carrara, *Staro*: (49 tavole) . . .	12,044110.
Milano, *Pertica*: (24 tavole)	6,545179.
Mirandola, *Biolca*: (72 tavole).	29,336320.
Modena, *Biolca*: (72 tavole)	28,364724.
Monaco (Baviera) *Juchart* = 400 pert. quad. .	34,0726.
Napoli, prima del 1840, Moggio: (48400 palmi quadr.)	33,64863.
Dopo il 1840, Moggio: (100 canne quad.) .	6,998864.
Nizza Marittima, *Starata*: (2 eminate, 8 moturali).	15,444900.
Nizza Monferrato, *Moggio*: (8 staia, 12 tavole) .	32,6672.
Novara, Moggio: (4 pertiche, 24 tavole, 12 gettate).	30,6603.
Oneglia, *Cannella* quad. di 144 palmi quadr. .	0,089281.
Ossola, *Staro*: (400 spazza)	15,7311.
Palermo e Sicilia, misura vecchia, *Canna* quadr. o *quartiglio*	0,042633.
Dopo il 1840, come a Napoli.	
Parigi, *Arpent des eaux et forêts* (100 pertiche) .	51,0720.
Arpent de Paris: (100 pertiche). . . .	34,1887.
Parma, *Biolca* (6 staia, 12 tav. 12 per). . .	30,81439.
Pavia, *Pertica*: (24 tavole)	7,697918.
Piacenza, *Pertica*: (24 tav., 12 pert. o brac.) .	7,620186.
Pietroburgo, *Dessâtina* di 3200 sacken quadrati pei terreni seminativi	145,6667.
Dessâtina di 2400 sacken quadr. pei boschi e campi.	109,2500.
Potenza, *Tomolo*.	22,02456.
Ravenna, *Tornatura*: (100 tavole). . . .	34,176615.
Reggio (Emilia), *Biolca*: (72 tavole) . .	29,222503.
Reggio (Calabria), *Quattronata*	12,11351.
Rimini, *Tornatura*: (100 tavole). . . .	29,479293.
Roma, *Rubbio*: (4 quarte, 4 scorzi, 4 quartucci, 175 staioli).	184,8438.
Per le vigne, *Pezza*: (4 quarte, 40 ordini, 10 staioli)	26,4063.
Rovigo, *Campo*: (840 tavole).	44,644077.
Salerno, *Moggio*	36,77712.
Sassari, *Rasiere*: (7 starelli, 8 imbuti) . .	139,53625.
Savona, *Cannella* quadrata	0,09.
Sondrio, *Pertica*: (24 tavole).	6,880776.

	Are
Stocolma, *Tonnelland* di $218\frac{3}{4}$ pert. quad.	49,3640.
Teramo, *Tomolata*	40,04465.
Torino, prima del 1818, *Giornata* : (100 tavole, 12 piedi, 12 once, 12 pun. 12 at.)	38,009599.
Dopo il 1818, idem.	38,103948.
Varsavia, *Morgen.*	55,9870.
Venezia. *Campo* : (4 quarte, 210 tav.)	36,566063.
Verona, *Campo* : (720 tav.)	30,479466.
Vienna, *Iugero* : (1600 klafter quadr.)	57,557405.
Vigevano, *Pertica* : (24 tavole)	7,388894.

Misure di Capacità.

NB. *La prima misura è per gli aridi, la seconda per i liquidi, quando non vi sia dichiarazione in contrario.*

	Ettolitri.
Acqui, *Sacco* : (8 staia, 16 coppi)	1,293064.
Alessandria (Piemonte), *Salma* : (12 staia, 16 coppi).	2,132586.
Brenta : (34 pinte)	0,578394.
Amburgo, *Last* : (3 wispel, 10 scheffels)	31,5888.
Fuder ; (6 ahms, 4 ankers).	8,68716.
Amsterdam, *Last* : 27 muddes, 4 scheepels)	30,03912.
Aam : (4 anckern, 2 steck-kannen)	1,55224.
Aquila degli Abruzzi, *Barile* : (60 caraffe) (vino)	0,38573.
Augusta, *Schaf* : (8 metzen , 4 vierlinge)	2,05267.
Fuder : (8 jez, 2 muids, 48 maas)	11,35872.
Bergamo, *Soma* : (8 staia, 4 quartari)	1,712812.
Brenta : (108 boccali)	0,706905.
Berlino, *Scheffel* : (16 metzen, 3 viertels).	0,54961.
Eimer : (2 ankers, 30 viertels).	0,68690.
Bologna, *Corba* : (2 staia, 8 quartiroli).	0,786448
Corba : (60 boccali)	0,785931.
Brescia, *Soma* : (12 quarte, 4 coppi)	1,459200.
Zerla : (72 boccali)	0,497427.
Cagliari, *Starello* : (16 imbuti)	0,505000.
Botte : (10 quartare, 8 mezze mezzette) (vino).	0,448400,

	Ettolitri
Barile: (8 quartare, 24 misure) (olio)	0,336352.
Campobasso, *Barile* di 45 $\frac{1}{2}$ caraffe (vino)	0,40627.
Carrara, *Sacco*: (3 secchie, 8 quarette)	0,725476.
Barile: (32 boccali)	0,429986.
Casale, *Sacco*: (8 staia, 16 coppi	1,293064.
Brenta: (45 pinte, 2 boccali	0,732105.
Catanzaro, *Salma*: (120 caraffe) (vino)	1,07147.
Cesena, *Sacco*: (4 quartarole, 5 bernarde)	1,381773.
Soma: (54 boccali)	0,639272.
Chieti, come Aquila	
Ciambery, *Veissel*: (4 quartans, 4 mouduriers). (frumento)	0,8126.
Idem (segala)	0,7648.
Idem (avena)	1,4340.
Pot de vin (vino)	0,01858.
Colonia, *Last*: 20 malter, 8 fässer)	32,4146·
Ohm: 26 viertels, 4 mass, 4 pinten)	1,55755.
Copenaga, *Tocnde*: (8 skieps, 18 pots)	1,39084.
Ancker: (10 stubgen)	0,37646.
Cosenza, *Barile*: (22 cannate) (vino)	0,28287.
Costantinopoli, *Fortin*: (4 killow)	1,32592.
Almud o meter (olio)	0,052270.
Cracovia, *Korzec*: (16 garmiec)	5,01116.
Becksa: 36 garmiec	0,5724.
Crema, *Soma*: (16 staia, 2 emine)	1,754811.
Brenta: (64 boccali)	0,485346.
Dresda, *Wiespel*: (2 malters, 12 scheffeln)	25,38912.
Fuder: (12 eimers)	8,0916.
Fass: (kannen 420) (birra)	3,933451.
Ferrara, *Moggio*: (20 staia, 4 quarte)	6,218584.
Mastello: (40 boccali)	0,567842.
Firenze, *Moggio*: (8 sacca, 3 staia, 4 quarti, 8 mezzette, 2 quartucci)	5,847087.
Barile da vino: (20 fiaschi, 4 mezzette, 2 quartucci)	0,455840.
Barile da olio: (16 fiaschi divisi come sopra)	0,334289.
Soma = 2 barili	
Foggia, *Barile*: (40 caraffe) (vino)	0,30001.

	Ettolitri
Forlì *Staio :* (16 provende, 2 mezzine) . . .	0,721622.
Soma : (42 boccali)	0,711277.
Francoforte sul Meno, *Achtel o malter :* (4 simmern, 2 metzen, 2 sechtern)	1,07984.
Stück : $\left(1\frac{1}{4}\right.$ füdern, 6 ohmen, 20 vierteln) .	10,75725.
Genova, *Mina :* (4 st. 2 quarte, 12 gambette) .	1,165318.
Mezzarola : (3 terzaruoli, 60 amole) (vino) .	1,590000.
Quarterone : (6 misurette) (olio) . . .	0,005116.
Grecia antica. *Medimno* o *achana :* (3 tritos, 2 hectos, 2 emiecton, 4 choenix, 2 xestes, 2 cotyles, 4 oxibaphon, 1,05 cyathos, 10 cochliarion)	0,520246.
Amphora = 0,5 di medimno.	
Metrete (liquidi) : (2 diote, 6 chous, 6 xestes, 2 cotyles, 2 tetarton, 3 cyathos, 2 conchæ, 2 mystron)	0,390184.
Imola, *Corba :* (2 staia, 4 quartaroli) . . .	0,688686.
Corba : (60 boccali)	0,746758.
Lipsia, *Scheffel*	1,38969.
Eimer : (54 visir kannen)	0,75852.
Lisbona, *Moyo :* (15 fanegas, 4 alquieres, 4 quartos)	8,139495.
Tonelada : (2 pipas, 26 almudes, 2 alquieres, 6 canhadas, 6 quartilhos)	8,60132.
Lodi, *Sacco :* (8 staia, 4 quartari) . . .	1,589566.
Brenta : (80 boccali)	0,662030.
Londra (misura imperiale), *Bushel :* (4 pecks, 2 gallons, 2 pottles, 2 quarts, 2 pints) . . .	0,363477.
Sack = 3 bushels; *quarter* = 8 bushels; *load* = 5 quarters; *last* = 2 loads; *chaldron* (vecchia misura di carbone) = 12 sacks.	
Gallon imperiale (carbone) misura nuova .	0,453458.

Pei liquidi il gallon si divide come sopra, ed i suoi multipli per la birra sono: *farkin* = 9 gallons; *kilderkin* = 2 firkins; *barrel* = 2 kilderkins; *hogshead* = 3 kilderkins; *butt* = 2 hogsh.; *tun* = 2 butts.

Pel vino i multipli del gallon sono: tierce = 42 gallons; *hogshead* = 63 gallons; *puncheon* = 84 gallons; *pipe* = 3 tierces; *tun* = 2 pipes.

	Ettolitri
Madrid, *Cahiz :* (12 fanegas, 12 calemines, 4 cuartillos)	66,700800.
Moyo : (16 arrobes, 8 azumbres) . . .	2,58176.
Mantova, *Sacco :* (3 staia, 4 quarti) . . .	1,038155.
Soglio : (60 boccali)	0,546818.
Massa-Carrara, *Sacco :* (3 st. 4 quarte). . .	0,755079.
Barile : (32 boccali)	0,436180.
Milano, *Moggio* : (8 staia, 4 qnartari) . . .	1,462343.
Brenta : (96 boccali)	0,755544.
Mirandola, *Quartaro :* (60 boccali) (liquidi) .	1,038509.
Modena, *Sacco :* (2 staia, 8 quarte) . . .	1,265004.
Quartaro : (90 boccali)	1,018117.
Monaco (Baviera), *Scheffel* (nuovo): (6 metzen, 2 vierteln, 4 maesseln)	3,62622.
Eimer : (64 mässe, 4 quarteln) . . .	0,68416.
Napoli, prima del 1840, *Tomolo*: (24 misure) .	0,553189.
Barile: (60 caraffe)	0,436738.
Dopo il 1840. — *Tomolo* (aridi), vale 3 palmi cubi e le divisioni sono decimali ; ma nella vendita al minuto si divide in 2 mezzette e 4 quarti, o in 24 misure	0,555451.
Barile : vale un cilindro di un palmo di diametro e 3 d'altezza ; dividesi in decimali, ma in commercio si usa dividerlo in 60 caraffe .	0,436250.
Botte = 12 barili.	
L'olio, invece di misurarsi a peso, secondo la legge del 1840, si misura in pratica a volume, cioè al minuto a staia di 96 misurelli, ed a salma di 16 staia all'ingrosso, ragguagliando uno staio a rotoli $10 \frac{1}{3}$, ed ogni salma a rotoli $165 \frac{1}{3}$.	
Nizza Marittima, *Carica :* (4 staia, 2 emine) .	1,617500.
Carica o salmata: (120 pinte) . . .	0,943500.
Novara, *Sacco :* (8 emine, 16 coppi) . . .	1,264729.
Brenta : (72 boccali)	0,546797.
Oneglia, *Mina :* (3 staia, 2 minette e 2 quarte) .	1,200000.
Per le olive: *gombata* di 3 staia . . .	1,980000.

	Ettolitri
Salmata: (2 barili, 48 pinte)	0,960000
Ossola, *Staio:* (2 emine, 4 quarte) . . .	0,324962.
Brenta: (48 boccali)	0,539912.
Palermo e Sicilia, vecchie misure: *palmo* cubo per gli aridi detto *tumulo*, e pei liquidi *quartara*	0,171930.
Dopo il 1840, come Napoli.	
Parigi, *Muid:* (2 sétiers. 2 mines, 2 minots, 3 boisseaux, 16 litrons)	18,73190.
Muid: 2 feuillets, 2 quartaux, 9 sétiers, 4 quarts, 2 pintes, 2 chopines)	2,68220.
Parma, *Staio:* (2 mine, 8 quartarole) . . .	0,470400.
Staio per la calce	0,48940.
Staio pel carbone	0,48880.
Brenta: (36 pinte, 2 boccali)	0,716720.
Pavia, *Sacco:* (6 emine, 2 quartari) . . .	1,222633.
Brenta: (96 boccali)	0,714427.
Piacenza, *Staio:* (2 mine, 8 cappelli) . . .	0,34820.
Veggiola: (10 brente, 48 pinte) . . .	7,577117.
Pietroburgo, *Tschetmert:* 2 osmine, 2 payons, 2 tscheswerik, 2 tescheswerkas) . . .	2,097430.
Oxhoft: (6 ankers, 2 stekars) . . .	2,212110.
Fass (mastello) : (400 stoof) . . .	4,91560.
Pipa (Botte) : (360 stoof).	4,42404.
Aam: (120 stoof)	1,47468.
Pontremoli, *Quartaro:* (12 quarrette) . . .	0,220200.
Barile: (36 boccali)	0,324000.
Quarterone: (olio)	0,00490.
Potenza, *Barile:* (40 pinte) (vino) . . .	0,35718.
Ravenna, *Rubbio:* (5 staia)	2,875454.
Barile: (40 boccali).	0,537713.
Reggio (Calabria), *Salma:* 100 quart. (vino). .	1,07147.
Reggio (Emilia), *Sacco:* (2 staia) . . .	1,194911.
Brenta : (60 boccali)	0,758981.
Rimini, *Staio*: (4 quarti, 3 bernarde) . .	1,876332.
Soma: (64 boccali)	0,761320.
Roma, *Rubbio*: (4 quarte, 4 starelli) . . .	2,944651.
22 scorzi = rubbio ; scorzo = 4 quartucci.	
Botte: (16 barili, 4 quartiroli, 8 boccali, 4 fogliette)	9,334655.

	Ettolitri
Soma = 2 barili.	
Rovigo, *Sacco*: (3 staia, 4 quarte). . . .	0,994393.
Mastello: (108 bozze)	1,047902.
Salerno, *Barile*: (60 caraffe) (vino) . . .	0,41966.
Sassari, *Rasiere*: (7 starolli, 2 corbule, 4 imbuti).	1,767500.
Botte: (10 quartare) (vino)	0,448400.
Barile: (8 quartare, 24 misure) (olio) . .	0,336352.
Savona, *Mezzaruola*: (4 barili) (vino) . . .	1,600000.
Barile: (240 quarteroni) (olio) . . .	0,654800.
Sondrio, *Soma*: (8 quartari, 4 emine) . . .	1,462343.
Soma: (120 boccali)	1,305610.
Stocolma, *Tunna*: (2 spannen, 4 fierding) . .	1,464900.
Tunna: (48 kannen, 2 stoofs)	1,25531.
Teramo, *Barile*: (60 caraffe) (vino) . . .	0,43625.
Torino, prima del 1818, Sacco: (5 emine, 8 coppi).	1,150278.
Brenta (36 pinte, 2 boccali)	0,492847.
Dopo il 1818.	
Sacco: (5 emine, 8 coppi)	1,152749.
Brenta: (36 pinte, 2 boccali)	0,493069.
Tortona, *Sacco*: (6 em. o staia, 16 coppelli) .	1,320000.
Brenta: (48 pinte, 2 boccali)	0,848623.
Varsavia, *Last*: (60 korezes)	30,6829.
Oxhost: (60 garniecs)	0,95820.
Venezia, *Moggio*: (8 mezzeni, 8 quartucci) .	3,332688.
Botte: (10 mastelli ; 7 secchie, 4 bozze) .	6,51690.
Anfora = 8 mastelli	6,009352.
Verona, *Sacco*: (3 minali, 4 quarte)	1,146535.
Brenta: (72 inghistare)	0,705111.
Vienna, *Metzen*: (16 mässeln).	0,615045.
Fass: (10 eimern)	5,668196.
Vigevano, *Sacco*: (6 staia, 4 quartari) . .	1,144875.

Pesi.

	Chilogrammi
Amburgo, *Pfund*: (2 marck, 8 unzen)	0,484384.
Amsterdam, *Pfund*: (16 unzen)	0,49409.
Aosta, *Rubbo*: (25 libbre, 12 once 8 ottavi) .	9,615000.

	CHILOGRAMMI
AUGUSTA *Pfund:* (32 lothe piccoli)	0,472657.
Pfund: (32 lothe grandi ;)	0,491112.
BERGAMO, *Libbra:* (12 once)	0,325129.
Libbra: (30 once)	0,812822.
BERLINO, *Pfund:* (2 marck, 16 lothe) . . .	0,467624.
Pfund (medicinali)	0,312.
BOLOGNA, *Libbra mercantile:* (12 once) . . .	0,361851.
BRESCIA, *Libbra:* (12 once)	0,320812.
CAGLIARI, *Cantaro:* (100 lib. 12 once) . . .	40,65631.
Lib. da orefice: (12 on., 16 argenti, 36 gr.) .	0,325250.
Misura (carbone)	65,050.
Colpo (calce) = 10 cantari.	
Misure tollerate: *Cantaro* = 40 Chilogr.	
CARRARA, *Libbra:* (12 once)	0,324997.
CASALE, *Rubbo:* (25 lib., 12 once, 8 ottavi) . .	8,134500.
CESENA *Libbra:* (12 once)	0,325474.
CIAMBERY, *Libbra:* (16 once 8 gros)	4,41861.
Quintale = 100 libbre.	
COLONIA, *Pfund:* (2 marck, 8 unzen) . . .	0,467539.
COSTANTINOPOLI, *Oka:* (4 cheki, 100 dramme) .	1,284825.
Teffe = 610 dramme; *quintale* = 44 oke, o 100 rotoli.	
CRACOVIA, *Pfund:* (2 mark, 16 lothe) . . .	0,40495.
CREMA, *Libbra:* (12 once)	0,325474.
DRESDA, *Pfund:* (32 lothe, 4 drachmen) . .	0,467147.
FERRARA, *Libbra* : (12 once)	0,345137.
FIRENZE, *Libbra* : (12 once, 24 den., 24 gr.) .	0,339542.
FORLÌ, *Libbra*: (12 once)	0,329441.
FRANCOFORTE sul Meno, *Quintale:* (100 pfunde, 2 mark, 16 lothe)	50,5296.
GENOVA, peso grosso, *Cantaro:* (6 rubbi, 25 lib., 12 on., 144 carati, 4 grani)	47,6496.
Peso piccolo, *Rubbo*: (25 lib., 12 once) . .	7,91875.
Pesata: (per le legna nel porto) = 4 cantari.	
Idem per la provincia = 5 cantari.	
GRECIA antica, *Medimno*	39,018.
Metrete	29,264.

Le suddivisioni come nelle misure di capacità.

	Chilogrammi
Imola, *Libbra*: (12 once)	0,362583.
Lipsia, *Pfund*: (2 mark, 8 unzen) . . .	0,466891.
Lisbona, *Quintal*: (4 arrobas, 32 arrateles o libbre, 2 marcos, 2 quartas, 2 oncas, 8 otavos o drachmas 3 scrupoles)	58,741888.
Londra, *peso avoirdupoids*, Pound o lib. (16 once, 16 drachms, 27 $\frac{11}{32}$ grani	0,453593.
Libbra = 7000 grani; *quarter* = 28 lib.; *Hundred vveigt (cwt.)* o *quintale* = 4 quartes: *ton* = 20 (cwt).	
Peso Troy. Libbra: (12 once, 20 pennyweights, 24 grani)	0,373242.
Madrid, *Quintale*: (4 arrobas, 25 libras, 4 panillas, 4 oncas).	46,0096.
Mantova, *Libbra*: (12 once)	0,310529.
Milano, *Libbra*: (12 once, 8 ottavi) . . .	0,326793.
Libbra: (28 once, 8 ottavi)	0 762517.
Marco: (8 once, 24 denari, 24 grani) . .	0,234997.
Libbra di marco = 12 once di marco . .	0,352495.
Modena, *Libbra*: (12 once)	0,340457.
Monaco (Baviera), *Quintale*: 100 pfunde, 16 unzen).	56,0000.
Napoli, dopo il 1840, *Cantaro*: (100 rotoli, 1000 trappesi; dividesi anche in parti decimali) .	89,099722.
Nizza Marittima, *Quintale*: (6 rubbi, 25 lib., 12 on., 8 ott., 3 den. 24 grani)	46,7443.
Novara, *Libbra grossa*: (28 once, 24 den.) . .	0,759439.
Libbra piccola: (12 once)	0,325474.
Oneglia, *Cantaro*: (6 rubbi, 25 lib)	47,1840.
Palermo e Sicilia, vecchie misure:	
Rotolo	0,793420.
Libbra	0,317368.
Dopo il 1840, come Napoli.	
Parigi, *Libbra*: (2 marchi, 8 once, 8 grossi, 3 scrupoli, 24 grani)	0,489506.
Tonnellata = 2000 lib.; *millier* = 1000 lib.; *quintale* = 100 lib.	
Parma, *Peso* (25 lib., 12 on., 24 den.) . .	8,200000.
Pavia, *Libbra grossa*: (28 on., 24 den.) . .	0,743692.

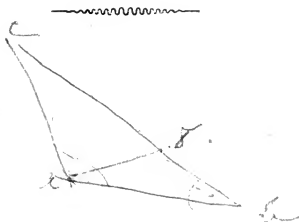
	Chilogrammi
Libbra piccola: (12 once)	0,318725.
Pechino. *Pecul*: (100 catty, 16 tails o lyang) .	60,0399.
Piacenza, *Peso o rubbo*: (25 lib., 12 on., 24 den.)	7,937933.
Pietroburgo, *Berchovvetz* (tonnellata): 10 poude, 40 founte, 32 lothe)	162,8000.
Pontremoli, *Peso*: (25 lib., 12 on., 24 den.) .	8,333350.
Ravenna, *Libbra*: (22 once)	0,347832.
Reggio, (Emilia), *Libbra*: (12 once) . . .	0,324542.
Rimini, *Libbra*: (12 once)	0,345516.
Roma, *Migliaio*: (10 quintali, 100 lib., 12 on., 8 ott., 3 den., 24 grani)	339,07185.
Rovigo, *Libbra sottile*: (12 once)	0,301416.
Libbra grossa: (12 once)	0,477294.
Sassari, come Cagliari.	
Savona, peso piccolo di Genova.	
Cantaro = 6 rubbi.	
Sondrio, *Libbra*: (30 once)	0,797882.
Stoccolma, *Skolpund*: (2 marc, 16 lode, 4 gros) .	0,425082.
Sten = 32 skolpunde; *centner* = 120 skolpunde; *wagg* = 155 skolpunde; *skippund* = 400 skolpunde.	
Torino, (avanti il 1818) *Rubbo* (25 lib., 12 on., 8 ott., 3 den., 24 grani, 24 granotti) . .	9,221113.
Idem (dopo il 1818)	9,221995.
Marco: (8 once, 24 den., 24 gr., 24 granotti) (avanti il 1818)	0,245896.
Idem (dopo il 1818)	0,245920.
Carato di 4 grani (materie preziose) prima del 1818 valeva grammi 0,213451; dopo 0,213472.	
Tortona, *Rubbo*: (25 libb., 12 on., 24 den.) .	8,14125.
Varsavia, *Pfund piccolo*: (16 nuzen, 2 lothe) .	0,377866.
Venezia, *Libbra grossa*: (12 on., 8 dram.) . .	0,476998.
Libbra sottile: (12 once)	0,301230.
Verona, *Libbra*: (12 once)	0,333176.
Libbra grossa: (12 once)	0,499762.
Vienna, *Libbra*: (30 once)	0,560012.
Marca	6,280644.

MONETE

La Lira di Torino si divideva in 20 *soldi ed il soldo in* 12 *denari, come la lira fiorentina.*

La Lira italiana o nuova di Torino è uguale al Franco, e si divide in decimi e centesimi.

	LIRE ITALIANE
FRANCIA, *Lira tornese* : (20 soldi, 12 den.) . .	0,99.
INGHILTERRA, *Pound*, (lira sterling : 20 shillings, 12 pence, 4 farthings)	25,21.
LOMBARDIA, *Fiorino* austriaco: (100 soldi, 10 decimi)	$2{,}469 \frac{11}{18}$.
Zvanziga nuova : (100 centesimi)	$0{,}864 \frac{16}{81}$.
Zvanziga vecchia : (100 centesimi)	$0{,}839 \frac{41}{81}$.
MODENA, *Lira* vecchia : (20 soldi o bolognini, 12 denari)	0,305.
NAPOLI e SICILIA, *Ducato* : (100 grani, 10 cavalli)	4,250.
Onza : (30 tari, 20 grana, 6 piccoli) . .	12,750.
PARMA, *Lira* vecchia : (20 soldi)	0,200.
PORTOGALLO, *Mille reis*	6,03.
PRUSSIA, *Tallero*	3,71.
ROMA; come nelle Romagne. Nelle tavole del dicastero del Censo romano allo scudo si attribuisce il valore di	5,3673.
ROMAGNE, *Scudo* : (10 paoli, 10 baiocchi, 10 denari)	5,320.
Grosso = 5 baiocchi.	
RUSSIA, *Rublo*.	4,00.
SPAGNA, *Piastra* : (20 reali)	5,25.
STATI UNITI, *Dollaro*	5,34.
TOSCANA, *Francescone* : (10 paoli, 8 crazie, 5 quattrini, 4 denari)	5,60.
Fiorino : (100 quattrini, 4 denari)	1,40.

Lira vecchia : (20 soldi, 12 denari) . .	0,84.
Scudo fiorentino: (7 lire, 20 soldi) . . .	5,88.
Lira lucchese : (20 soldi, 12 denari) . .	0,746 $\frac{2}{3}$.
Pezza livornese : (20 soldi, 12 denari) . .	4,830.

PROGRAMMA D'ARITMETICA

PER LE SCUOLE TECNICHE

ANNO I.

Le quattro prime operazioni sui numeri interi e decimali.

Significato d'una frazione ordinaria — Frazione pura, apparente, impura o mista — Riduzione d' nu numero composto in numero frazionario e riduzione reciproca — Trasformazione d'una frazione in altre equivalenti — Riduzione di più frazioni allo stesso denominatore.

Le prime quattro operazioni sui numeri frazionari e sui numeri composti, riducendoli prima a numeri frazionari.

Sistema metrico vigente nel luogo prima dell' attuale. — Sistema metrico decimale — Conversione delle unità di una specie nelle altre unità della medesima specie — Uso delle tavole di riduzione delle misure metriche nelle attuali applicazioni.

Rapporto — Proporzionalità diretta ed inversa — Regola del tre semplice e composta col metodo di riduzione all' unità — Applicazione alle regole di cambio e di società.

ANNO III.

Potenze — Calcolo degli esponenti.

Numeri primi — Formazione di una tavola di numeri primi — Caratteri di divisibilità dei numeri interi — Scomposizione d'un numero intero ne' suoi fattori primi — Ricerca di tutti i divisori d'un numero — Ricerca del minimo multiplo e del massimo divisore comune a più numeri dati — Applicazione alla riduzione delle frazioni al minimo denominatore comune.

Ricerca del medesimo comun denominatore col metodo dei residui.

Conversione d'una frazione ordinaria in frazione decimale — Caso in cui questa è finita — Casi in cui è periodica — Conversione d'una frazione decimale finita o periodica in frazione ordinaria.

Radice quadrata dei numeri interi e decimali con una data approssimazione.

CLASSE V GINNASIALE.

Sistemi di numerazione.
Le prime quattro operazioni sui numeri interi.
Esponenti — Calcolo delle potenze.
Divisibilità dei numeri.
Calcolo dei numeri frazionari.

Scuole normali.

ANNO I.

Numerazione decimale parlata e scritta.

Le prime quattro operazioni sui numeri interi, sui numeri frazionari, sui numeri composti, sui numeri decimali.

Rapporto — Proporzionalità diretta ed inversa — Regola del tre semplice e composta col metodo di riduzione all' unità — Applicazioni.

ANNO III.

Potenze — Calcolo degli esponenti.

Divisibilità dei numeri.

Scomposizione d'un numero ne' suoi fattori primi — Modo di trovare tutti i divisori d'un numero — Massimo comun divisore e minimo multiplo comune a più numeri dati.

Radice quadrata d' un numero intero e decimale con una data approssimazione.

PROGRAMMA D'ARITMETICA

PER L'ESAME D'AMMISSIONE AL CORSO UNIVERSITARIO DI MATEMATICA

I. Definizioni (da 1 a 8) — Numerazione decimale (da 8 a 28) — Teoria generale dei sistemi di numerazione, di cui 10 non è la base (da 95 a 103) — Addizione, sottrazione, moltiplicazione e divisione dei numeri interi; verificazione de' resultati di queste operazioni (da 29 a 87; e da 117 a 118) — Indipendenza d'un prodotto dall'ordine con cui si moltiplicano i fattori (61) — II. Divisibilità dei numeri (da 103 a 117 — Numeri primi; numeri primi fra loro (da 132 a 145) — Numeri divisibili per 2, 3, 5, 9, 11, 25 (da 110 a 118) — Scomposizione d'un numero nei suoi fattori primi (da 145 a 148) — Ricerca del massimo comun divisore (da 118 a 132; e 151) — Ricerca del più piccolo numero divisibile per numeri dati (da 152 a 156) — III. Frazioni ordinarie (156) — Loro riduzione ai minimi termini; allo stesso denominatore e al più piccolo denominatore (da 166 a 174) — Addizione, sottrazione, moltiplicazione e divisione delle frazioni e dei numeri complessi, ossia composti di parte intera e di parte frazionaria (da 174 a 195; e da 312 a 319) — IV. Frazioni decimali (da 197

a 225) — Addizione, sottrazione, moltiplicazione e divisione fatte in modo da ottenere solo le cifre decimali delle quali si abbisogna; approssimazione del resultato ottenuto, allorquando si opera sopra numeri la cui approssimazione è nota (214 e 224) — Riduzione delle frazioni ordinarie in decimali (208, 209; 225 a 233) — Generatrice d' una frazione periodica (da 236 a 245) — V. Sistema metrico-decimale; misure di lunghezza, di superficie, di volume e di peso; monete (da 245 a 304) — Ragguaglio tra le nuove e le antiche misure e monete del Regno (Tavole a pag. 327 ec.; num. 319,) — VI. Ragione aritmetica ed equidifferenza (da 352 a 358) — Ragione geometrica, proporzioni e sue principali proprietà (352, e 361 ecc.) — Ragione diretta e inversa (377) — Regola del tre semplice e composta (da 378 a 387) — Regola d' interesse e di sconto semplice (da 387 a 400, e 404) — Regola di società, di cambio e d' alligazione (da 419 a 445) — VII. Potenze e radici dei numeri positivi, ed esponenti o indice intero o positivo da 320 a 352) — Quantità irriduttibili ed irrazionali (337, 346 ecc.) — Estrazione della radice quadrata dei numeri interi o frazionari con una data approssimazione (da 346 a 352).

INDICE DELLE MATERIE

ERRATA-CORRIGE

PAG.	VERSO	ERRORI	CORREZIONI
20	12	2 . 0 . . . . . 3 . 0	2^o . . . . 3^o.
21	15	3691	3701
25	4 da basso	362	862
30	9	$+ 9 + 4$	$+ 9 \times 4$
35	5	presso	preso
41	11	1445	11445
48	4 da basso	8 volte	3 volte
57	14	$= 481037$	$= 479305$
59	ultimo	giorno	ogni giorno
66	20	6 abcdfg	6 $abcd^2fg$
85	4 da basso	(vedi n°. 131).	(vedi n°. 132).
86	18	terza divisione	quarta divisione
98	18	$2^3 \times 2^2 \times 5$	$2^3 \times 3^2 \times 5$
125	5	$\frac{2}{3} \times \frac{3}{4}$	$\frac{2}{5} \times \frac{3}{4}$
147	ultimo	14300 390 260 00	14300 390 260 00
152	4	14424,24	14424,15
155	15	$\frac{3 \times 5^2}{2^3 \times 5^2}$	$\frac{3 \times 5^2}{2^3 \times 5^3}$
175	6	Litr. 1703	Litr. 1503
184	6 da basso	100000000	1000000000
191	9	57 cent. quad.	50 cent. quad.
»	15	27 centiare	28 centiare.
199	7	7560 360	7560 360
200	4	1835,21 c.	1838,92 c.
»	10	35 c.	37 c.
205	4 da basso	37141	37144

	VERSO	ERRORI	CORREZIONI
	15	soldi 44	soldi 14
	5	$0_m,000243$	$0_m,002432$
	23	(n.° 327)	(n.° 326)
	ultimo	7	725
	2ª colonna	25	
[illegible]	4 da basso	338 ×	328 ×
226	13	43,578888	43,578947
234	4 da basso	alternando	invertendo
»	2 da basso	invertendo	alternando
244	7	$x = \frac{\times 815}{12}$	$x = \frac{8 \times 15}{12}$
»	14	$\frac{120}{15}$	$\frac{120}{12}$
245	2	: 74350	: 75350
»	3	61 decagrammi	60 decagrammi
249	17	$\frac{14318}{80}$	$\frac{14308}{80}$
261	8	18388, 89 c.	18888,89c
»	27	Anni $1 \frac{1}{2}$	Anni $12 \frac{1}{2}$
265	22	$\frac{5 + 7}{12}$	$\frac{5 \times 7}{12}$
272	10	9156,25	2253,85
286	6 da basso	74 grammi	47 grammi
318	12	824,09 + 8404,09	824,09 = 8404,09
320	11	$\log.\left(1 + \frac{r}{100}\right) - \log.$	$\log.\left(1 + \frac{r}{100}\right) = \log.$
324	11 da basso	79394,76	79349,04 . . . . .

FINE